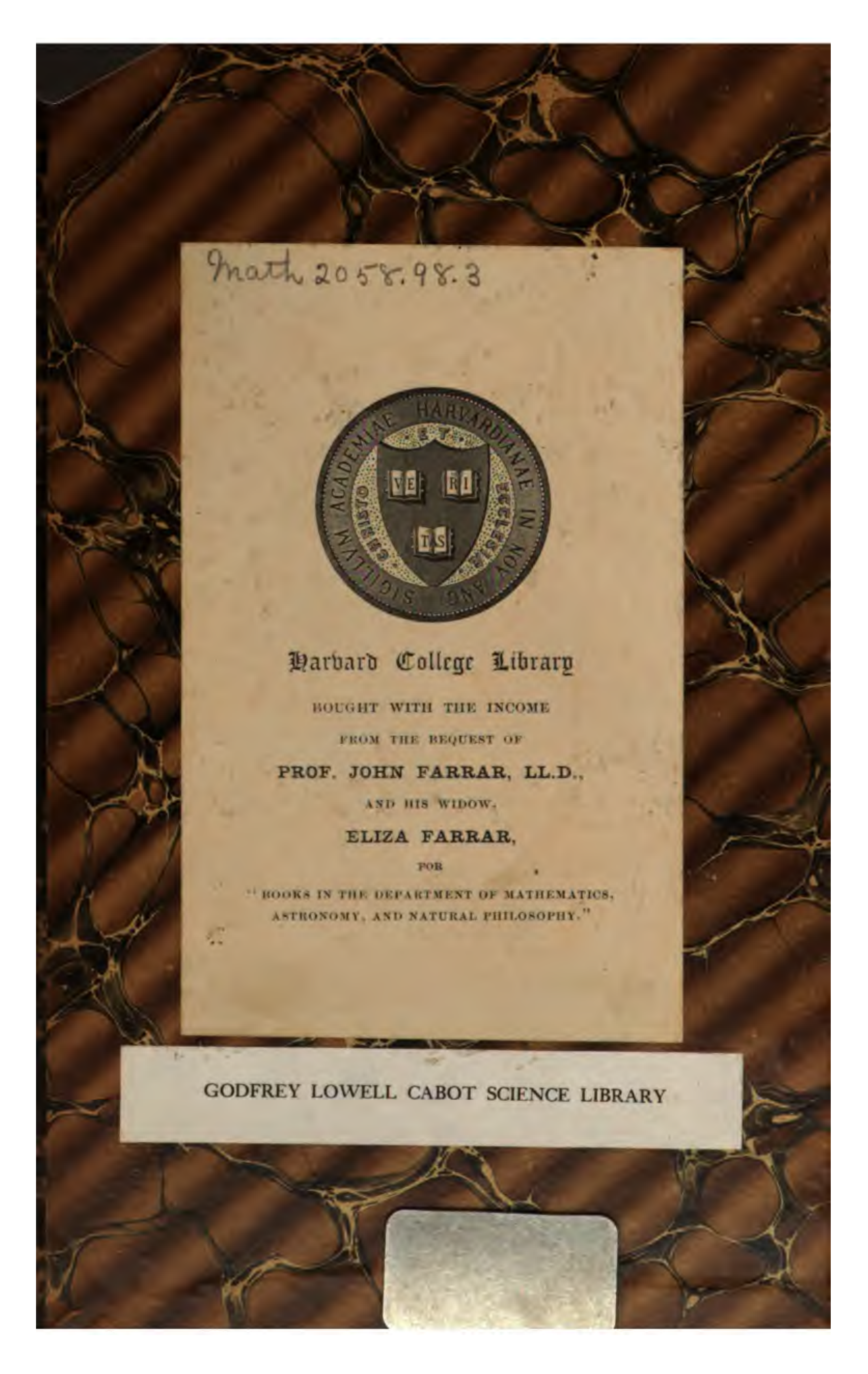
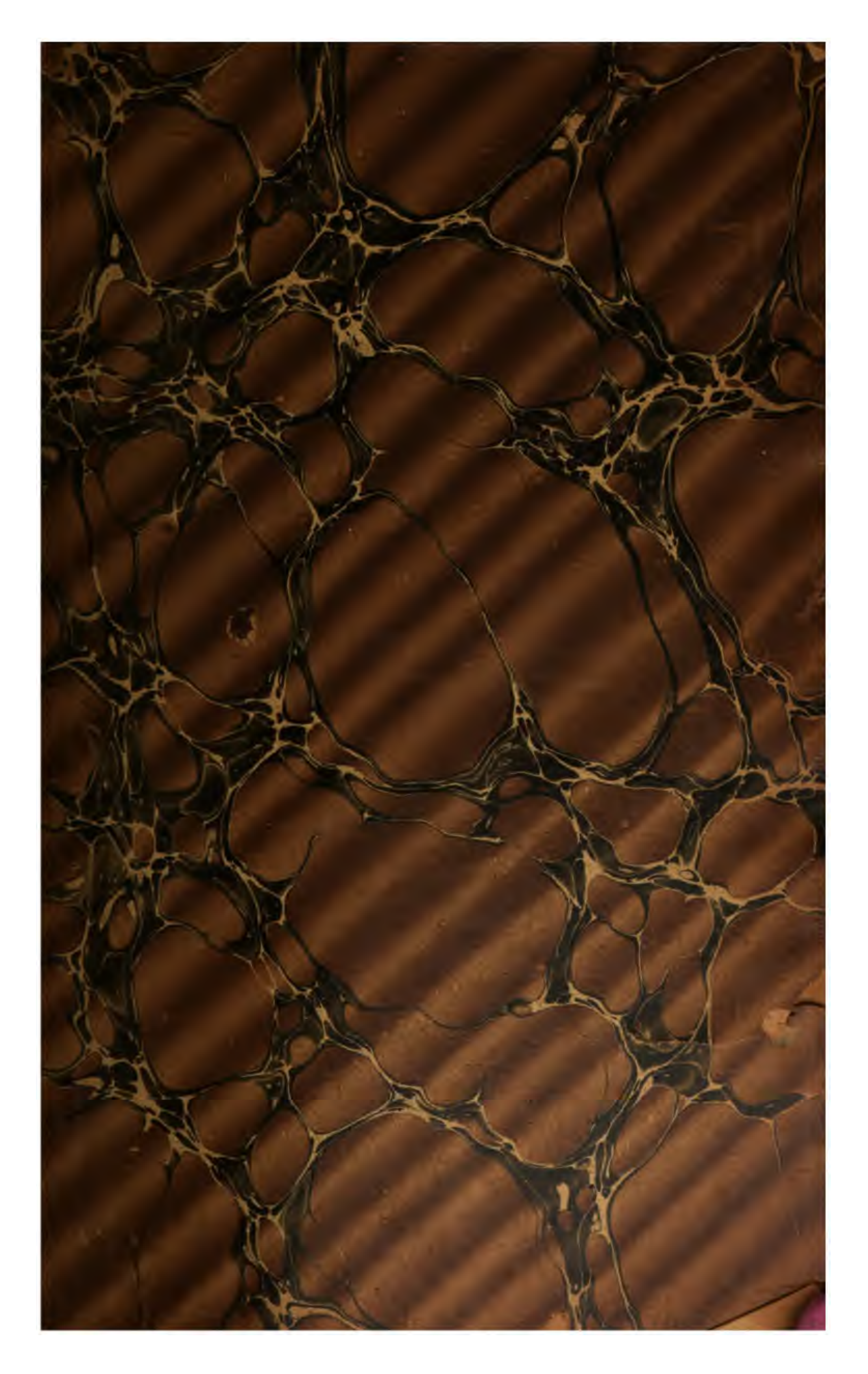
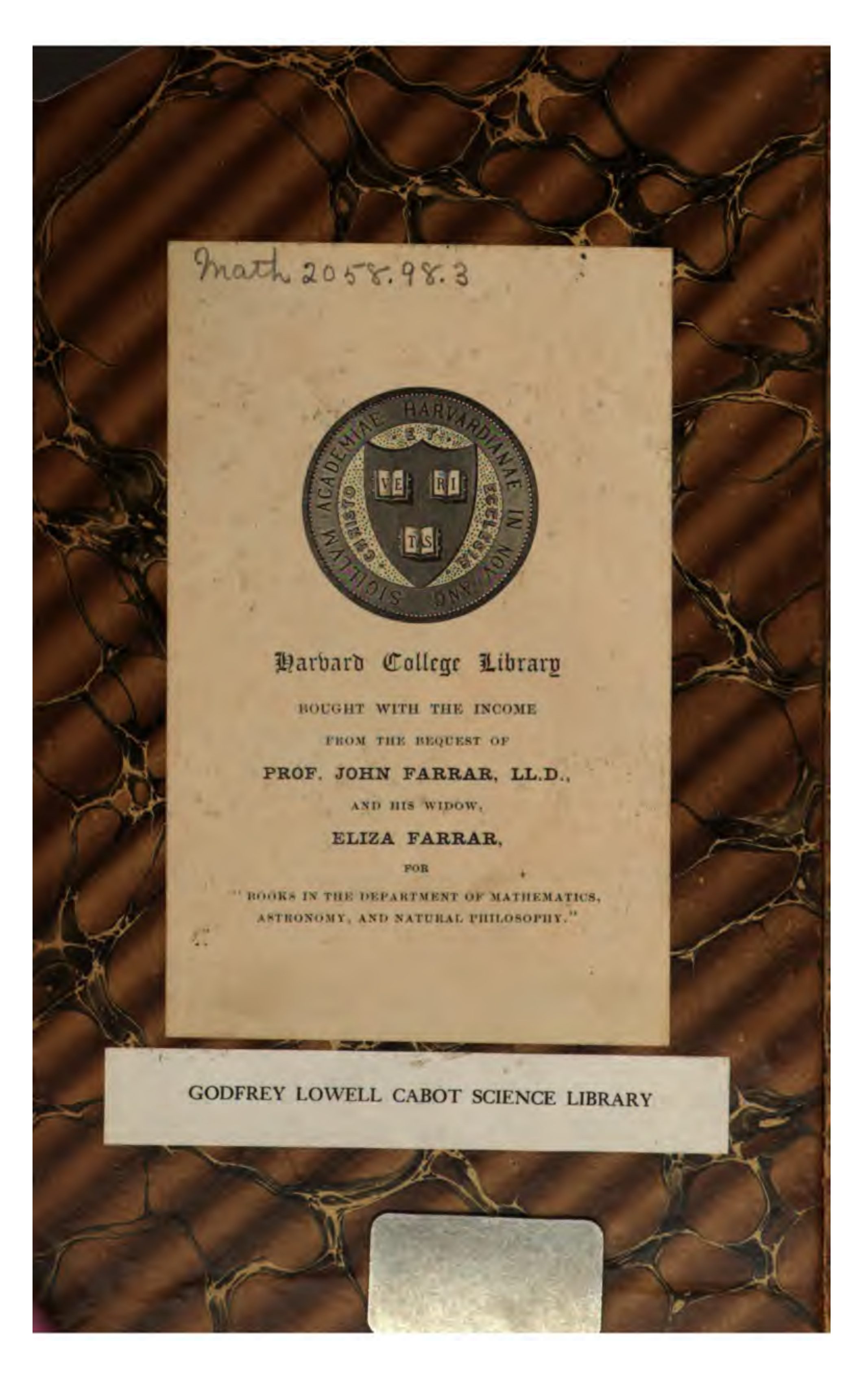
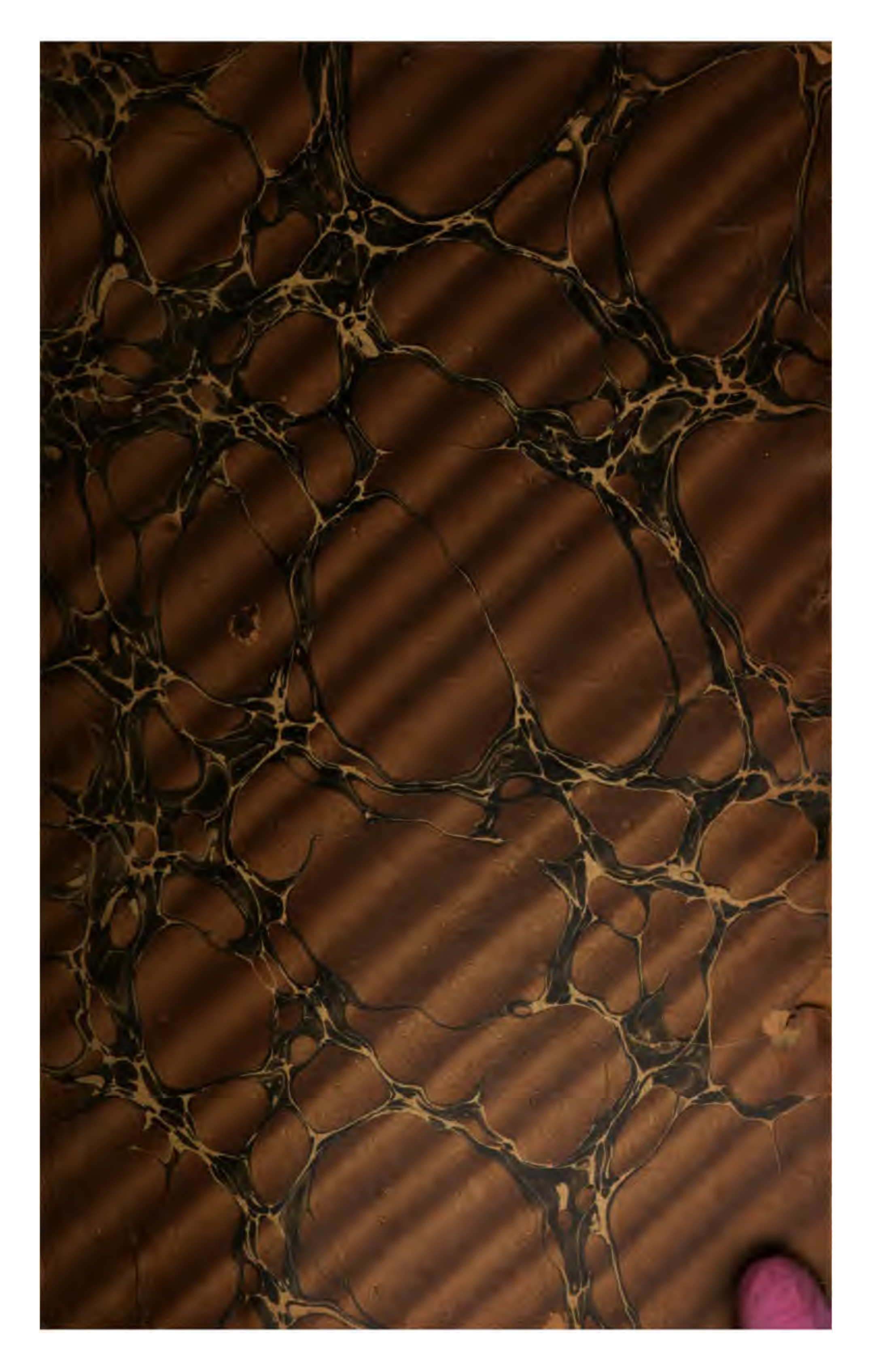

Math 2058.98.3
SIGILLUM ACADEMIAE HARVARDIANAE IN NOV ANG
CHRISTO ET ECCLESIAE
VE RI TAS
Harvard College Library
BOUGHT WITH THE INCOME
FROM THE BEQUEST OF
PROF. JOHN FARRAR, LL.D.,
AND HIS WIDOW,
ELIZA FARRAR,
FOR
"BOOKS IN THE DEPARTMENT OF MATHEMATICS,
ASTRONOMY, AND NATURAL PHILOSOPHY."
GODFREY LOWELL CABOT SCIENCE LIBRARY





Math 2058.98.3
SIGILLVM ACADEMIAE HARVARDIANAE IN NOV ANG
CHRISTO ET ECCLESIAE
VE RI TAS



TRAITÉ D'ALGÈBRE

TRAITÉ
D'ALGÈBRE
ÉLÉMENTAIRE

A L'USAGE

DES ÉLÈVES DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES
DES ASPIRANTS AU BACCALAURÉAT DE L'ENSEIGNEMENT
CLASSIQUE (*2e Série*)
ET AU BACCALAURÉAT DE L'ENSEIGNEMENT
MODERNE (*2e et 3e Séries*)
ET DES CANDIDATS AUX ÉCOLES DU GOUVERNEMENT

PAR

N. COR & **J. RIEMANN**

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE,
AGRÉGÉ DES SCIENCES MATHÉMATIQUES,
PROFESSEUR AU LYCÉE CARNOT.

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE,
AGRÉGÉ DES SCIENCES MATHÉMATIQUES,
PROFESSEUR AU LYCÉE LOUIS-LE-GRAND.

PARIS
LIBRAIRIE NONY & Cie
17, RUE DES ÉCOLES, 17

1898


JUL 1902

Nous avons tiré grand parti des *Leçons d'Arithmétique* de M. Jules Tannery. Ainsi, dans la théorie du plus grand commun diviseur algébrique, nous n'avons eu qu'à suivre cet ouvrage pas à pas ; dans plusieurs passages des chapitres IV et V, nous avons adopté (et supposé connue du lecteur) l'idée qu'y donne M. Tannery du nombre arithmétique irrationnel. Signalons également l'admirable *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable* du même auteur, à laquelle nous avons fait de fréquents emprunts. Enfin nous avons cherché, autant que possible, à nous inspirer de l'enseignement oral de ce maître auquel nous devons tant et sans qui, à coup sûr, le présent livre n'aurait jamais vu le jour.

Nous sommes heureux aussi d'avoir l'occasion de recommander aux lecteurs l'excellent *Traité d'Arithmétique* de M. Humbert. L'étude de l'arithmétique devant précéder celle de l'algèbre, ils y trouveront, aussi clairement exposées qu'il est possible, les idées purement arithmétiques que nous avons supposées acquises.

TRAITÉ D'ALGÈBRE

CHAPITRE I

LES NOMBRES ALGÉBRIQUES ET LES POLYNOMES

I. — NOMBRES ALGÉBRIQUES

1. On distingue, en algèbre, deux espèces de nombres : les nombres *positifs* et les nombres *négatifs*.

Les nombres *positifs* sont les nombres considérés en arithmétique précédés du signe +, que l'on énonce *plus*. Exemples : $+2$, $+\frac{5}{7}$, $+\sqrt{3}$. On sous-entend souvent le signe + et on confond les nombres arithmétiques avec les nombres positifs. Ainsi on convient que 2 représente la même chose que $+2$.

Les nombres *négatifs* sont les nombres considérés en arithmétique précédés du signe —, que l'on énonce *moins*. Exemples : -2, $-\frac{5}{7}$, $-\sqrt{3}$.

On observera que les signes + et — n'ont nullement, ici, le sens d'opération : on doit toujours les regarder comme attachés aux nombres arithmétiques qu'ils précèdent.

Aux nombres ainsi définis, on adjoint le nombre zéro, qui n'est ni positif, ni négatif, et que l'on représente par le caractère 0. Au lieu de dire qu'un nombre est 0, on dit aussi que ce nombre est *nul*.

On appelle *valeur absolue* d'un nombre algébrique le nombre arithmétique qui en fait la base. Un nombre algébrique est dit

entier, fractionnaire, rationnel ou irrationnel, suivant que sa valeur absolue est elle-même un nombre arithmétique entier, fractionnaire, rationnel ou irrationnel. Deux nombres algébriques sont dits *égaux*, lorsqu'ils ont la même valeur absolue et le même signe. Deux nombres algébriques sont dits *opposés*, lorsqu'ils ont la même valeur absolue et des signes contraires. Par définition, la valeur absolue de 0 est 0; un nombre n'est égal à 0 ou opposé à 0 que s'il est lui-même 0. Deux nombres égaux à un troisième ou opposés à un troisième sont égaux entre eux. Deux nombres qui ne sont pas égaux sont dits *inégaux*.

En algèbre comme en arithmétique, on représente les nombres par des lettres. La lettre a pourra donc représenter un nombre positif, nul ou négatif. On convient que la notation $+a$ représente le même nombre que a, et que la notation $-a$ représente le nombre opposé à a. Enfin nous représenterons par la notation $|a|$ la valeur absolue de a. Ainsi, par exemple :

si a représente	$+3$,	$+a$ représente	$+3$,	$-a$ représente	-3,	$\|a\|$ représente	3 ;
si a »	-3,	$+a$ »	-3,	$-a$ »	$+3$,	$\|a\|$ »	3 ;
si a »	0,	$+a$ »	0,	$-a$ »	0,	$\|a\|$ »	0.

Pour marquer que deux nombres a, b sont égaux, on écrit $a = b$, ce qui s'énonce *a égale b*. $a = b$ est une *égalité*; a s'appelle le *premier membre* et b le *second membre* de l'égalité.

Pour marquer que les deux nombres a et b ne sont pas égaux, on écrit $a \neq b$, ce qui s'énonce *a différent de b*.

2. On fait sur les nombres algébriques des opérations analogues à celles qu'on fait sur les nombres arithmétiques. Nous allons construire leurs définitions de manière que les propriétés essentielles des opérations arithmétiques se conservent.

1° Addition.

3. On appelle *somme algébrique* de deux nombres algébriques a, b le nombre algébrique c formé par la règle suivante :

Si a et b ont le même signe, la valeur absolue de c est la somme (arithmétique) de leurs valeurs absolues et le signe de c est leur signe commun.

Si a et b ont des signes contraires (et ne sont pas deux nombres opposés), la valeur absolue de c est la différence (arithmétique) de leurs valeurs absolues et le signe de c est le signe de celui des deux nombres a, b qui a la plus grande valeur absolue.

Si a et b sont deux nombres opposés, le nombre c est 0; et si l'un des deux nombres a, b est 0, le nombre c est égal à l'autre, qui peut être aussi 0.

Le nombre c ainsi défini dans tous les cas se représente par $a+b$. Comme l'ordre des deux nombres a, b n'intervient pas dans la définition du nombre c, on a, quels que soient a et b, l'égalité $a+b=b+a$.

Exemples :

$$(+5)+(+7)=+12,$$
$$(-5)+(-7)=-12,$$
$$(+7)+(-5)=+\ 2,$$
$$(-7)+(+5)=-\ 2,$$
$$(+5)+(-5)=\ \ 0,$$
$$(+5)+\ \ 0\ =+\ 5.$$

Remarquons que zéro est le seul nombre qui, ajouté à un nombre, ne le modifie pas, et qu'il n'y a que deux nombres opposés dont la somme puisse être nulle.

Ajouter ou *additionner* (algébriquement) a à b ou b à a, c'est former la somme algébrique $a+b$; l'opération qui consiste à trouver cette somme est une *addition* (algébrique).

4. Nous allons justifier en quelque sorte les définitions qui précèdent en nous en servant pour établir le théorème de Chasles (ou de Möbius).

Nous appellerons *vecteur* une portion de droite telle que les deux points qui la limitent ne jouent pas le même rôle : l'un est regardé comme l'*origine*, l'autre comme l'*extrémité*. Au lieu de dire tout au long « le vecteur qui a pour origine le point A et

pour extrémité le point B », on dit simplement le vecteur AB, en énonçant d'abord la lettre qui désigne l'origine, puis celle qui désigne l'extrémité.

Considérons la droite indéfinie $x'x$, qui porte le vecteur AB. On peut la parcourir dans deux sens opposés. Choisissons arbitrairement l'un d'eux, $x'x$, que nous nommerons le *sens positif;* par opposition, l'autre, xx', sera dit le *sens négatif*. Choisissons de plus une unité de longueur. Nous appellerons *valeur algébrique* du vecteur AB et nous représenterons par la notation $\overline{AB}$ le nombre algébrique dont la valeur absolue mesure la longueur de la portion de droite AB, et dont le signe est + ou —, suivant que, pour aller de l'origine à l'extrémité du vecteur, on marche dans le sens positif ou dans le sens négatif.

x' A B x

Les symboles $\overline{AB}$ et $\overline{BA}$ représentent donc toujours deux nombres opposés, en sorte que

$$\overline{AB} + \overline{BA} = 0.$$

Cela posé, voici le *théorème de Chasles :*

Quels que soient les trois points A, B, C *situés sur l'*AXE $x'x$ (on appelle ainsi une droite indéfinie sur laquelle on a choisi un sens positif), *on a l'égalité*

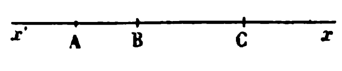
$$(1) \qquad \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}.$$

Supposons le nombre $\overline{AC}$ positif. Il faut alors démontrer que la somme $\overline{AB} + \overline{BC}$ est positive et qu'elle a pour valeur absolue AC. Or le point B peut être à gauche de A, ou entre A et C, ou à droite de C. Examinons successivement ces trois cas.

Si le point B est à gauche de A, le nombre $\overline{AB}$ est négatif et le nombre $\overline{BC}$ est positif. C'est d'ailleurs ce dernier nombre qui a la plus grande valeur absolue : la somme $\overline{AB} + \overline{BC}$ est donc positive. Sa valeur absolue est BC — AB ou AC.

x' B A C x

Si le point B est entre A et C, les nombres $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ sont tous deux positifs : la somme $\overline{AB}+\overline{BC}$ est également positive. Sa valeur absolue est $AB+BC$ ou AC.



Si le point B est à droite de C, le nombre $\overline{AB}$ est positif et le nombre $\overline{BC}$ est négatif. Comme dans le premier cas, c'est le nombre positif qui a la plus grande valeur absolue : la somme $\overline{AB}+\overline{BC}$ est donc positive. Sa valeur absolue est $AB - BC$ ou AC.

L'égalité (1) se trouve donc démontrée lorsque le nombre $\overline{AC}$ est positif. Nous laissons au lecteur le soin de faire la démonstration lorsque ce nombre est négatif. Nous verrons bientôt le parti qu'on peut tirer de ce théorème.

5. On appelle *somme algébrique de plusieurs nombres* $a, b, c, \ldots$, rangés dans un ordre déterminé, le nombre formé en ajoutant (algébriquement) le premier nombre au second, le résultat obtenu au troisième, le nouveau résultat obtenu au quatrième, et ainsi de suite. Cette somme algébrique se représente par $a+b+c+\ldots$

Théorème. — *La somme algébrique de plusieurs nombres reste la même quel que soit l'ordre dans lequel on les ajoute.*

On voit, en raisonnant comme en arithmétique, qu'il suffit de démontrer que la somme de trois nombres reste la même quand on échange les deux derniers :

$$(1) \qquad a+b+c = a+c+b.$$

Tout revient à faire voir qu'*on obtient le même résultat en ajoutant à un nombre successivement deux autres nombres ou en lui ajoutant leur somme effectuée*. Car on aura dès lors $a+b+c = a+(b+c)$, $a+c+b = a+(c+b)$, et, comme $b+c = c+b$, l'égalité (1) se trouvera démontrée.

Pour établir l'égalité $a+b+c = a+(b+c)$, prenons sur un axe $x'x$ un point A; puis appelons B le point de l'axe tel que $\overline{AB} = a$, C le point de l'axe tel que $\overline{BC} = b$, enfin

D le point de l'axe tel que $\overline{CD} = c$. En vertu du théorème de Chasles, on a les égalités

$$a + b = \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC},$$
$$a + b + c = \overline{AC} + \overline{CD} = \overline{AD};$$
$$b + c = \overline{BC} + \overline{CD} = \overline{BD},$$
$$a + (b + c) = \overline{AB} + \overline{BD} = \overline{AD}.$$

On a donc bien l'égalité $a + b + c = a + (b + c)$.

De ce théorème on conclut, comme en arithmétique, qu'*on ne change pas la valeur d'une somme algébrique en y remplaçant plusieurs termes par leur somme effectuée*, et qu'on a, en particulier, l'égalité

$$a + b + c + d + \ldots = a + (b + c + d + \ldots).$$

6. *Soit* $a + b + c + d + \ldots$ *et* $a' + b' + c' + d' + \ldots$ *deux sommes de* n *termes. Si les nombres* a', b', c', d', ... *sont opposés respectivement aux nombres* a, b, c, d, ..., *les deux sommes sont également deux nombres opposés.*

Considérons d'abord deux sommes de deux termes :

$$s = a + b, \qquad s' = a' + b'.$$

Si a et b ont le même signe, a' et b' ont aussi le même signe : s et s' ont donc tous deux pour valeur absolue $|a| + |b|$. Mais s a le signe de a, s' le signe de a'. s et s' sont donc deux nombres opposés. — Supposons maintenant a et b de signes contraires, et $|a| > |b|$. a' et b' sont aussi de signes contraires, et par suite s et s' ont tous deux pour valeur absolue $|a| - |b|$. Mais s a le signe de a, s' le signe de a'. On a donc encore $s' = -s$.

Le théorème se généralise facilement. Ainsi les sommes

$$a + b + c, \qquad a' + b' + c'$$

sont égales à $s + c$, $s' + c'$: ce sont deux nombres opposés d'après ce qui précède. On passera de même du cas $n = 3$ au cas $n = 4$, et ainsi de suite.

Ce théorème se traduit par l'égalité

$$-a + (-b) + (-c) + \ldots = -(a + b + c + \ldots).$$

2° Soustraction.

7. *Étant donné deux nombres a et b, il existe un nombre c et un seul tel qu'on ait*

(1) $$a = b + c.$$

En admettant que le nombre c existe, il est aisé de le calculer. En effet, ajoutons $-b$ aux deux membres de (1); nous aurons

$$a + (-b) = (b + c) + (-b) = c + [b + (-b)] = c + 0 = c.$$

Le nombre c, s'il existe, est donc unique. Il est maintenant facile de vérifier qu'en ajoutant à b le nombre $c = a + (-b)$ que nous venons de calculer, on trouve comme somme a. On a, en effet,

$$b + [a + (-b)] = a + [b + (-b)] = a + 0 = a.$$

Nous appellerons ce nombre c *l'excès algébrique du nombre a sur le nombre b. On l'obtient en ajoutant à a le nombre $-b$*, et on le représente par $a - b$. Pour marquer que c est l'excès algébrique de a sur b, on peut écrire indifféremment

$$a = b + c \qquad \text{ou} \qquad c = a - b.$$

Retrancher ou *soustraire* (algébriquement) b de a, c'est calculer le nombre $a - b$. L'opération qui consiste à trouver ce nombre est une *soustraction*. On désigne souvent, sous le nom un peu vague de *différence* entre les deux nombres a et b, l'un quelconque des nombres $a - b$ ou $b - a$. La différence entre deux nombres égaux est nulle et réciproquement.

Il n'y a pas, en algèbre, de différence essentielle entre l'addition et la soustraction : retrancher le nombre b revient à ajouter le nombre opposé $-b$. Par suite, il n'y a pas lieu de distinguer en algèbre les sommes algébriques et les expressions de la forme $a \pm b \pm c \pm d$, indiquant des additions et des soustractions à effectuer, dans un ordre déterminé, sur des nombres donnés a, b, c, d. Par exemple, l'expression $a - b + c - d - e$ représentera la somme algébrique des nombres

$$a, \quad -b, \quad +c, \quad -d, \quad -e.$$

Pour retrancher d'un nombre a une somme $b + c + d$, on peut ajouter au nombre a les termes de la somme changés de signe.

En effet, on a

$$a - (b + c + d) = a + [-(b + c + d)]$$
$$= a + [(-b) + (-c) + (-d)] = a + (-b) + (-c) + (-d).$$

8. Comme application de ce qui précède, donnons un nouvel énoncé du théorème de Chasles. Choisissons sur un axe $x'x$ un point arbitraire O, que nous appellerons l'*origine*. La position d'un point A de l'axe est déterminée quand on connaît la valeur algébrique $\overline{OA} = a$ du vecteur OA; a s'appelle l'*abscisse* du point A. Quel que soit le nombre algébrique a, il y a un point et un seul de l'axe ayant a pour abscisse. Cela posé, le *théorème de Chasles* peut s'énoncer ainsi :

La valeur algébrique d'un vecteur quelconque est égale à l'abscisse de son extrémité moins l'abscisse de son origine.

En effet, considérons le vecteur AB d'origine A et d'extrémité B. On a, en vertu du théorème de Chasles,

$$\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB},$$

et par suite

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}.$$

9. Terminons enfin par deux remarques souvent employées.

1° La valeur absolue d'une somme de plusieurs nombres est au plus égale à la somme des valeurs absolues de ces nombres.

Tout d'abord s'il n'y a que deux nombres a, b, on a, d'après la définition même de $a + b$,

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|,$$

et, pour que l'on ait une égalité, il faut et il suffit que a et b soient de même signe. Du cas de deux nombres, on s'élève au cas de trois, quatre, ... nombres. Considérons par exemple trois nombres a, b, c. On a, d'après ce que nous venons de voir,

$$|a + b + c| \leqslant |a + b| + |c|,$$
$$|a + b| \leqslant |a| + |b|;$$

d'où

$$|a + b + c| \leqslant |a| + |b| + |c|,$$

et, pour qu'on ait une égalité, il faut et il suffit que les trois nombres a, b, c aient le même signe.

2° La valeur absolue de la somme ou de la différence de deux nombres a et b est au moins égale à la différence des valeurs absolues de ces nombres.

Supposons $|a| > |b|$. On a, d'après la définition même de $a + b$,

$$|a+b| \geqslant |a| - |b|,$$

et, pour qu'on ait une égalité, il faut et il suffit que a et b soient de signes contraires. Comme $a - b = a + (-b)$, et que b et $-b$ ont la même valeur absolue, on a aussi

$$|a-b| \geqslant |a| - |b|,$$

et, pour qu'on ait une égalité, il faut et il suffit que a et b soient de même signe.

3° Multiplication.

10. On appelle *produit* de deux nombres algébriques le nombre algébrique dont la valeur absolue est égale au produit des valeurs absolues des facteurs et dont le signe est + ou —, suivant que les deux facteurs ont ou non le même signe. Par définition, le produit de deux nombres, dont l'un est nul, est nul, quel que soit l'autre. Observons que, réciproquement, le produit de deux nombres ne peut être nul que si l'un des deux nombres l'est. Observons aussi que le produit d'un nombre par 1 est ce nombre.

Nous indiquerons le produit de a par b par l'une des notations $a \times b$, ou $a.b$, ou ab; la dernière est la plus usitée. Comme l'ordre des deux nombres a, b n'entre pas dans la définition de leur produit, on a, quels que soient a, b, l'égalité $ab = ba$. Une autre conséquence de cette définition, c'est que

$$(-a)b = -ab, \qquad (-a)(-b) = ab.$$

Ainsi, lorsque dans un produit de deux facteurs, on change le signe de l'un des facteurs, le produit change de signe sans chan-

ger de valeur absolue; lorsque, dans un produit de deux facteurs, on change à la fois les signes des deux facteurs, le produit ne change pas.

Exemples :

$$(+5)(+7) = +35\,;$$
$$(-5)(-7) = +35\,;$$
$$(+5)(-7) = -35\,;$$
$$(-5)(+7) = -35\,;$$
$$0 \times b = 0, \quad \text{quel que soit } b\,;$$
$$1 \times (-7) = -7.$$

Multiplier a par b ou b par a, c'est former le produit ab ; l'opération qui consiste à trouver ce produit est une *multiplication* (algébrique).

11. Pour justifier en quelque sorte la définition qui précède, nous allons nous en servir pour établir la *formule du mouvement uniforme.*

Un mobile se meut sur une droite indéfinie, d'un mouvement uniforme, avec une vitesse donnée et dans un sens donné. Connaissant sa position A *à une certaine époque (que nous appellerons l'origine des temps), trouver sa position* M *à une autre époque quelconque donnée.*

Choisissons sur la droite : 1° un sens positif $x'x$; 2° une origine des abscisses O. Soit v le nombre ayant pour valeur absolue la vitesse du mobile et pour signe le signe + ou le signe —, suivant que le mobile marche dans le sens positif ou dans le sens négatif. Soit a l'abscisse $\overline{\text{OA}}$ de la position A du mobile à l'origine des temps. Soit enfin t le nombre ayant pour valeur absolue l'intervalle de temps qui sépare l'origine des temps de l'époque à laquelle on veut déterminer la position du mobile, et pour signe le signe + ou le signe —, suivant que cette époque est postérieure ou antérieure à l'origine des temps : v, a, t sont les données du problème. Prenons maintenant pour inconnue x l'abscisse $\overline{\text{OM}}$ de la position cherchée M du mobile.

Le théorème de Chasles fournit la relation $x = a + \overline{\text{AM}}$. Montrons qu'on a, dans tous les cas : $\overline{\text{AM}} = vt$. En effet, le nombre qui mesure AM est la valeur absolue de vt : tout revient

donc à vérifier que $\overline{AM}$ et vt ont le même signe. Or, si t est positif, le signe de vt est le signe de v; d'autre part, le mobile va de A en M : le sens AM sera donc le sens positif ou le sens négatif, suivant que v sera positif ou négatif. Si t est négatif, le signe de vt est le signe de $-v$; dans ce cas, le mobile va de M en A ; le sens MA est le sens positif ou le sens négatif suivant que v est positif ou négatif, et le sens AM est le sens positif ou le sens négatif suivant que $-v$ est positif ou négatif. On a donc $\overline{AM} = vt$, et par suite $x = a + vt$. Telle est la formule du mouvement uniforme.

12. On appelle *produit algébrique de plusieurs nombres* a, b, c, d, e, rangés dans un ordre déterminé, le nombre formé en multipliant (algébriquement) le premier nombre par le second, le produit obtenu par le troisième, le nouveau produit obtenu par le quatrième, et ainsi de suite. Ce produit se représente par $a \times b \times c \times d \times e$, ou par $a.b.c.d.e$, ou simplement par $abcde$. Les nombres a, b, c, d, e s'appellent les *facteurs* du produit. Pour qu'un produit de facteurs soit nul, il faut et il suffit que l'un au moins des facteurs le soit.

Il est aisé de conclure de cette définition : 1° que la valeur absolue d'un produit de plusieurs facteurs est le produit (arithmétique) des valeurs absolues de ces facteurs ; 2° que ce produit (aucun facteur n'étant nul) est positif si le nombre des facteurs négatifs est pair et négatif si le nombre des facteurs négatifs est impair. De là résulte que le produit de plusieurs nombres est indépendant de leur ordre. Par suite, on ne change pas la valeur d'un tel produit en y remplaçant plusieurs facteurs par leur produit effectué. On a, en particulier, l'égalité

$$abcde = a \times (bcde).$$

13. Produit d'une somme par un nombre. — Pour multiplier par un facteur donné la somme de plusieurs nombres arithmétiques, il suffit de multiplier chaque terme de la somme par le facteur dont il s'agit et d'additionner les produits obtenus. La somme de plusieurs nombres algébriques jouit de la même propriété.

Supposons que la somme n'ait que deux termes. Soit à multiplier $a+b$ par m. Appelons A, B, M les valeurs absolues de a, b, m. Si a et b ont le même signe, $a+b$ aura ce signe; les nombres am, bm, $am+bm$, $(a+b)m$ auront tous le même signe; les deux derniers ont pour valeurs absolues

$$\text{AM}+\text{BM} \quad \text{et} \quad (\text{A}+\text{B})\text{M};$$

ces valeurs absolues sont égales : donc $am+bm=(a+b)m$. Si a, b sont de signes contraires, et si $\text{A}>\text{B}$, $a+b$ a le signe de a : les nombres am, $(a+b)m$, $am+bm$ ont le même signe, car on a $|am|>|bm|$. D'ailleurs les deux derniers nombres ont pour valeurs absolues

$$(\text{A}-\text{B})\text{M} \quad \text{et} \quad \text{AM}-\text{BM}.$$

Ces valeurs absolues sont égales : donc $(a+b)m=am+bm$.

Lorsque l'un des nombres m, a, b, $a+b$ est nul, la proposition est évidente.

Supposons maintenant qu'on multiplie une somme de trois termes par un nombre; on aura

$$(a+b+c)m=(a+b)m+cm=am+bm+cm.$$

Du cas de trois termes, on passe de même au cas de quatre termes, etc.

Il est souvent avantageux de mettre, inversement, la somme $am+bm+cm+\ldots$ sous la forme $(a+b+c+\ldots)m$. C'est ce qu'on appelle *mettre le nombre m en facteur commun*. En particulier, la somme $a+a$ peut s'écrire

$$1\times a+1\times a=(1+1)a=2a;$$

la somme $a+a+a$ peut s'écrire $3a$, et ainsi de suite.

On démontre maintenant, comme en arithmétique, que le produit de plusieurs sommes est la somme des produits partiels que l'on obtient en prenant, de toutes les manières possibles, un terme et un seul dans chacun des facteurs, et en multipliant entre eux les termes ainsi choisis. Le nombre de ces produits partiels est le produit des nombres de termes des différents facteurs.

4° Division.

14. *Étant donné un premier nombre a quelconque et un second nombre b* DIFFÉRENT DE 0, *il existe un troisième nombre q tel que*

$$(1) \qquad a = bq,$$

et il n'en existe qu'un.

En effet, désignons par b' le nombre algébrique dont la valeur absolue est l'inverse de la valeur absolue de b et dont le signe est le signe de b. On a évidemment $bb' = +1$. Ce nombre b' s'appelle l'*inverse* (algébrique) de b. Cela posé, en admettant que le nombre q existe, il est aisé de le calculer. Pour cela, multiplions par b' les deux membres de l'égalité (1); nous aurons

$$ab' = (bq)b' = q(bb') = q \times 1 = q.$$

Le nombre q, s'il existe, est donc unique.

Il est maintenant facile de vérifier qu'en multipliant b par le nombre $q = ab'$ que nous venons de calculer, on trouve comme produit a :

$$b \times ab' = a \times bb' = a \times 1 = a.$$

Ce nombre q s'appelle le *quotient algébrique* de a par b, ou le *rapport* de a à b. On le représente par la notation $\frac{a}{b}\cdot$ Pour marquer que q est le quotient de a par b, on peut écrire à volonté

$$a = bq \qquad \text{ou} \qquad q = \frac{a}{b}\cdot$$

Diviser un nombre a par un nombre b, c'est calculer le quotient de a par b; l'opération qui consiste à trouver ce quotient est une *division*; a est le *dividende* et b le *diviseur*. Le nombre $\frac{a}{b}$ est nul pour $a = 0$, et seulement dans ce cas; pour $a \neq 0$, il a pour valeur absolue le quotient arithmétique $\frac{|a|}{|b|}$ et pour signe + ou —, suivant que a et b sont de même signe ou de signes contraires.

Observons encore que, quels que soient les nombres a et b,

pourvu toutefois que b ne soit pas nul, on a

$$\frac{+a}{+b} = \frac{a}{b}, \qquad \frac{-a}{+b} = -\frac{a}{b}, \qquad \frac{-a}{-b} = -\frac{a}{b}.$$

Enfin, m étant un nombre différent de zéro, on a l'égalité

$$a + b + c + \cdots = m\left(\frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m} + \cdots\right).$$

Faire cette transformation, c'est *mettre* m *en facteur*.

15. L'expression $\frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$ s'appelle aussi une *fraction algébrique*; a est le *numérateur*, b le *dénominateur*. Les fractions algébriques ont les mêmes propriétés que les fractions arithmétiques :

1° La valeur d'une fraction algébrique ne change pas quand on multiplie ou qu'on divise ses deux termes par un même nombre m différent de zéro.

Montrons que les deux fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{am}{bm}$ sont égales. Appelons en effet q la valeur de la première ; on a

$$a = bq, \qquad \text{d'où} \qquad am = bq \times m = bm \times q :$$

q est donc aussi la valeur de la seconde fraction. Cette proposition permet de réduire plusieurs fractions au même dénominateur, en multipliant les deux termes de chacune d'elles par le produit des dénominateurs de toutes les autres.

2° Soit $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b}$, $\frac{a''}{b}$ $(b \neq 0)$ des fractions ayant même dénominateur. Leur somme est la fraction $\frac{a + a' + a''}{b}$; car, si l'on appelle q, q', q'' leurs valeurs respectives, on a

$$a = bq, \qquad a' = bq', \qquad a'' = bq'',$$

d'où

$$a + a' + a'' = b(q + q' + q'').$$

3° Le produit des fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$, $\frac{a''}{b''}$ $(bb'b'' \neq 0)$ est la fraction $\frac{aa'a''}{bb'b''}$. Car, en appelant q, q', q'' leurs valeurs, on a

$$a = bq, \qquad a' = b'q', \qquad a'' = b''q''.$$

d'où $$aa'a'' = bb'b'' \times qq'q''.$$
On conclut de là que le quotient d'un nombre k par une fraction $\frac{a}{b}$ $(ab \neq 0)$ est le produit de k par la fraction inverse $\frac{b}{a}$, puisque le produit de $k\frac{b}{a}$ par $\frac{a}{b}$ est k.

4° $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}$ étant des fractions égales, et m, m', m'' des nombres tels que $mb + m'b' + m''b'' \neq 0$, la fraction $\frac{ma + m'a' + m''a''}{mb + m'b' + m''b''}$ est égale aux précédentes.

Car, en appelant q leur valeur commune, on a
$$a = bq, \qquad a' = b'q, \qquad a'' = b''q,$$
d'où $$ma + m'a' + m''a'' = (mb + m'b' + m''b'')q.$$

5° Élévation aux puissances.

16. On appelle *puissance* $m^{\text{ième}}$ d'un nombre a (m étant un entier supérieur à 1) et on représente par a^m le produit de m nombres égaux à a; m s'appelle l'*exposant* de la puissance. *Élever a à la puissance m*, c'est calculer a^m. Les puissances 2e et 3e d'un nombre s'appellent, pour des raisons géométriques connues, le *carré* et le *cube* de ce nombre. Par définition, $a^1 = a$; mais on sous-entend d'ordinaire l'exposant 1. Si a est négatif, a^m est positif ou négatif suivant que m est pair ou impair. En particulier, $(-1)^m = +1$ ou -1, suivant que m est pair ou impair. Si m est pair, $(-a)^m = a^m$; si m est impair, $(-a)^m = -a^m$.

On démontre, comme en arithmétique, les égalités
$$a^m \times a^{m'} = a^{m+m'},$$
et, plus généralement,
$$a^m \times a^{m'} \times a^{m''} \times \cdots = a^{m+m'+m''+\cdots};$$
$\frac{a^m}{a^p}$ $(a \neq 0) = a^{m-p}$ ou $\frac{1}{a^{p-m}}$, suivant que m est supérieur ou inférieur à p;

$$(a^m)^{m'} = a^{mm'};$$
$$a^m \times a'^m \times a''^m = (aa'a'')^m;$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}, \qquad b \neq 0.$$

Enfin, on vérifie aisément les égalités

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

et, plus généralement,

$$(a+b+\cdots+l)^2 = a^2 + b^2 + \cdots + l^2 + 2(ab+ac+\cdots+kl);$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3;$$
$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2.$$

6° Extraction de racines.

17. On démontre en arithmétique que, quel que soit le nombre arithmétique a, il existe un nombre arithmétique b et un seul tel que $b^m = a$, et on écrit $b = \sqrt[m]{a}$. En algèbre, une question se pose : a étant un nombre algébrique quelconque, y a-t-il un ou plusieurs nombres dont la puissance $m^{ième}$ soit égale à a?

En premier lieu, supposons m impair. Si a est positif, appelons b sa racine $m^{ième}$ arithmétique : le nombre positif b répond à la question, et il est le seul, car la puissance $m^{ième}$ d'un nombre négatif est négative. Si a est négatif, aucun nombre positif ne répond à la question. Soit $-b'$ un nombre négatif répondant à la question. On a $(-b')^m = a$, ou $b'^m = -a$, de sorte que $b' = \sqrt[m]{-a}$. Inversement, la puissance $m^{ième}$ de $-\sqrt[m]{-a}$ est bien égale à a. Il y a donc, dans le cas actuel, un nombre et un seul répondant à la question, à savoir $-\sqrt[m]{-a}$.

Supposons m pair. Si a est négatif, il n'existe aucun nombre dont la puissance $m^{ième}$ soit égale à a. Si a est positif, appelons encore b sa racine $m^{ième}$ arithmétique. Parmi les nombres positifs, b répond à la question et il est le seul. Soit $-b'$ un

nombre négatif répondant à la question. On a $(-b')^m = a$, ou $b'^m = a$. Donc $b' = b$. Inversement, la puissance $m^{\text{ième}}$ de $-b$ est bien égale à a. Il y a donc, dans ce cas, deux nombres dont la puissance $m^{\text{ième}}$ soit a, à savoir $\pm\sqrt[m]{a}$.

Si l'on convient d'adopter dès maintenant une terminologie qui sera expliquée plus tard, on peut résumer ainsi les résultats qui précèdent :

Pour m impair, l'équation $x^m = a$ admet une racine et une seule : $+\sqrt[m]{a}$ si a est positif, $-\sqrt[m]{-a}$ si a est négatif.

Pour m pair, l'équation $x^m = a$ n'admet pas de racine si a est négatif; elle en admet deux, $\pm\sqrt[m]{a}$, si a est positif.

Remarque. — Lorsque m est impair et a négatif, on écrit souvent $\sqrt[m]{a}$ pour $-\sqrt[m]{-a}$. Mais, quand on introduit ce symbole dans des calculs, on ne doit pas oublier qu'il a le sens de $-\sqrt[m]{-a}$.

Exemple : a étant négatif et b positif, on a

$$\sqrt[3]{a}\times\sqrt{b}=-\sqrt[3]{-a}\times\sqrt{b}=-\sqrt[6]{(-a)^2}\times\sqrt[6]{b^3}=-\sqrt[6]{a^2}\times\sqrt[6]{b^3}=-\sqrt[6]{a^2b^3}.$$

Si l'on avait appliqué, sans précautions, les règles de calcul des radicaux arithmétiques, on aurait écrit

$$\sqrt[3]{a}\times\sqrt{b} = \sqrt[6]{a^2}\times\sqrt[6]{b^3} = \sqrt[6]{a^2b^3},$$

ce qui est faux.

Remarquons encore que, en supposant m pair, a négatif, b positif, on a

$$\sqrt[m]{a^m.b} = \sqrt[m]{a^m}\times\sqrt[m]{b} = -a\sqrt[m]{b}.$$

Inégalités.

18. a et b étant deux nombres arithmétiques distincts, pour que a soit plus grand que b (ou que b soit plus petit que a), il faut et il suffit que la différence (algébrique) $a-b$ soit positive. Dès lors, a et b étant deux nombres algébriques quelconques, différents l'un de l'autre, nous dirons que a est *plus grand* que b (ou que b est *plus petit* que a) si la différence

$a-b$ est positive. Cette définition est légitime, car, si $a-b$ est positive, $b-a$ est négative, en sorte que, si a est plus grand que b, b n'est pas plus grand que a. A la place des mots plus grand, plus petit, on emploie, comme en arithmétique, les signes $>$, $<$. Ainsi $a>b$, $b<a$ veulent dire que a est plus grand que b ou que b est plus petit que a; a est le *premier membre*, b le *second membre* de l'*inégalité* $a>b$.

D'après cela, un nombre positif est plus grand que 0 et que tout nombre négatif; un nombre négatif est plus petit que 0 et que tout nombre positif; de deux nombres négatifs, le plus grand est celui qui a la plus petite valeur absolue :

$$-5>-7, \quad \text{car} \quad -5-(-7)=-5+7=+2.$$

Il revient au même de dire qu'un nombre a est positif ou d'écrire $a>0$; de dire qu'un nombre a est négatif ou d'écrire $a<0$.

Deux inégalités sont dites *équivalentes*, quand chacune d'elles est une conséquence de l'autre. Les deux inégalités $a>b$, $a-b>0$ sont équivalentes ; il en est de même des deux inégalités $a<b$, $a-b<0$. Deux inégalités équivalentes à une troisième sont équivalentes entre elles.

19. Nous allons démontrer trois principes sur les inégalités :

1° *Quand on ajoute un même nombre aux deux membres d'une inégalité, on obtient une seconde inégalité équivalente à la première.*

Ainsi, les deux inégalités $a>b$, $a+c>b+c$ sont équivalentes : en effet, elles équivalent toutes deux à l'inégalité $a-b>0$.

Ce principe permet de faire passer un terme d'un membre d'une inégalité dans l'autre : on efface ce terme dans le membre où il est et on l'écrit dans l'autre avec un signe contraire. Par exemple, l'inégalité $a+b-c>d-e$ équivaut à l'inégalité $a-d>c-b-e$; on passe de la première à la seconde en ajoutant les nombres $-b$, $+c$, $-d$ à ses deux membres et en supprimant ensuite, au premier membre, les nombres opposés $+b$, $-b$ et les nombres opposés $+c$, $-c$; au second membre, les nombres opposés $+d$, $-d$.

2° *Si l'on multiplie ou si l'on divise par un même nombre différent de* 0 *les deux membres d'une inégalité ; si, en outre, on a soin de garder le sens de l'inégalité si ce nombre est positif, de le changer au contraire si ce nombre est négatif, on obtient une seconde inégalité équivalente à la première.*

Ainsi, soit m un nombre différent de 0. L'inégalité (1) $a > b$ équivaut à (2) $ma > mb$, si m est positif ; à (3) $ma < mb$, si m est négatif.

En effet, si la différence $a - b$ est positive, le produit $m(a - b) = ma - mb$ est positif si m est positif et négatif si m est négatif. Réciproquement, si le produit $m(a - b)$ est positif ainsi que le premier facteur m, il en est de même du second $a - b$; si le produit $m(a - b)$ est négatif ainsi que le premier facteur m, le facteur $a - b$ est positif.

D'après cela, l'inégalité $\frac{a}{b} > \frac{c}{d} (bd \neq 0)$ équivaut à $ad > bc$ ou à $ad < bc$, suivant que bd est positif ou négatif. Elle équivaut en tout cas à l'inégalité $abd^2 > cdb^2$ obtenue en multipliant ses deux membres par le facteur positif b^2d^2.

3° *Des inégalités de même sens* $a > b$, $a' > b'$, $a'' > b''$ *on peut conclure l'inégalité* $a + a' + a'' > b + b' + b''$.

Car, si les nombres $a - b$, $a' - b'$, $a'' - b''$ sont positifs, leur somme

$$(a - b) + (a' - b') + (a'' - b'') = a + a' + a'' - (b' + b' + b'')$$

est également positive. Si l'on a $a \geqslant b$, $a' \geqslant b'$, $a'' \geqslant b''$, on a, par cela même, $a + a' + a'' \geqslant b + b' + b''$; et la somme $a + a' + a''$ ne peut être égale à la somme $b + b' + b''$ que si l'on a simultanément $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$. D'après cela, les inégalités $a > b$, $b \geqslant c$ entrainent l'inégalité $a + b > b + c$, ou $a > c$. De même, les inégalités $a \geqslant b$, $b > c$ entrainent l'inégalité $a > c$.

On démontre, en arithmétique, d'autres principes sur les inégalités, ceux par exemple qui permettent de multiplier membre à membre plusieurs inégalités de même sens, ou d'élever à une même puissance les deux membres d'une inégalité. *Ces principes ne sont pas applicables en algèbre.*

Toutefois, en élevant à une même puissance *impaire*, m, les deux membres d'une inégalité,

(1) $$a > b,$$

on obtient une inégalité équivalente

(2) $$a^m > b^m.$$

En effet, si a est > 0, que b soit > 0 ou < 0, il est clair que (1) et (2) sont équivalentes. Supposons $a < 0$; alors l'inégalité (1) exige que b soit < 0, et en outre que l'on ait $|a| < |b|$, d'où $|a^m| < |b^m|$; comme d'ailleurs a^m et b^m sont tous deux négatifs, on voit que (2) est une conséquence de (1). Inversement, (1) est une conséquence de (2). Donc (1) et (2) sont équivalentes.

Formule du binome de Newton.

20. Nous résoudrons d'abord trois problèmes qui serviront dans la recherche de la formule du binome.

I. **Arrangements.** — Étant donné m objets différents, si l'on en prend p et qu'on les place les uns à côté des autres sur une ligne droite, on obtient ce qu'on appelle un *arrangement* de ces m objets p à p : deux arrangements sont regardés comme distincts s'ils diffèrent soit par la nature, soit par l'ordre des objets.

Ainsi les arrangements des lettres a, b, c deux à deux sont ab, ac, ba, bc, ca, cb.

Le nombre des arrangements de m objets p à p s'indique ordinairement par la notation A_m^p. Quelle est la valeur de A_m^p?

On a évidemment $A_m^1 = m$; tout revient à trouver une relation entre A_m^p et A_m^{p-1} $(p > 1)$. Pour cela, imaginons qu'on ait formé tous les arrangements de m objets $p-1$ à $p-1$, et plaçons successivement à la suite de chacun d'eux chacun des $m-p+1$ objets qui n'y entrent pas : nous obtiendrons $A_m^{p-1}(m-p+1)$ arrangements des m objets p à p. On a formé de la sorte tous les arrangements p à p et chacun une seule fois. En effet :

1° Un arrangement quelconque p à p a été formé, car un tel arrangement peut s'obtenir en plaçant le dernier objet à la suite de l'arrangement formé par les $p-1$ autres.

2° Deux quelconques des arrangements que l'on a obtenus sont distincts : car s'ils proviennent du même arrangement $p-1$ à $p-1$, ils diffèrent par la nature du dernier objet, et s'ils pro-

viennent de deux arrangements différents $p-1$ à $p-1$, ils diffèrent au moins soit par la nature soit par l'ordre des $p-1$ premiers objets.

Nous avons donc démontré la formule

$$A_m^p = A_m^{p-1}(m-p+1).$$

En y faisant $p=2$, on trouve

$$A_m^2 = A_m^1(m-1) = m(m-1);$$

en y faisant $p=3$, on trouve

$$A_m^3 = A_m^2(m-2) = m(m-1)(m-2);$$

et ainsi de suite. En général

$$A_m^p = m(m-1)(m-2)\ldots(m-p+1).$$

Ainsi, *le nombre des arrangements distincts de m objets pris p à p est le produit de p nombres entiers consécutifs dont le plus grand est m.*

II. **Permutations.** — Si, dans la formule précédente, on fait $p=m$, on obtient le nombre des arrangements de m objets m à m. Ces arrangements, dans lesquels figurent tous les objets, se nomment des *permutations*. Si on désigne leur nombre par P_m, on a

$$P_m = 1.2.3 \ldots m.$$

Ainsi, *le nombre des permutations de m objets distincts est égal au produit des m premiers nombres entiers.*

III. **Combinaisons.** — On appelle *combinaisons* de m objets distincts p à p les résultats que l'on obtient en associant ensemble p quelconques des m objets considérés, ces résultats différant au moins par la nature d'un de ces objets.

Ainsi les combinaisons des lettres a, b, c deux à deux sont ab, ac, bc.

Le nombre des combinaisons de m objets p à p s'indique ordinairement par le symbole C_m^p. Pour calculer C_m^p, nous chorcherons une relation entre A_m^p, P_p et C_m^p.

Imaginons qu'on ait formé toutes les combinaisons distinctes de m objets p à p, et permutons de toutes les façons possibles les p objets qui figurent dans chacune de ces combinaisons; nous obtiendrons $C_m^p \times P_p$ arrangements des m objets p à p. On a formé de la sorte tous les arrangements p à p et chacun une seule fois. En effet :

1° Un arrangement quelconque p à p a été formé, car les p objets qu'il contient figurent dans une combinaison p à p, et comme on a formé toutes les permutations de ces p objets, on a obtenu l'arrangement considéré.

2° Deux quelconques des arrangements obtenus sont différents: car, s'ils proviennent de la même combinaison, ils diffèrent par l'ordre des objets, et s'ils proviennent de deux combinaisons différentes, ils diffèrent au moins par la nature d'un objet. On a donc

$$C_m^p . P_p = A_m^p,$$

d'où

$$C_m^p = \frac{A_m^p}{P_p} = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-p+1)}{1.2.3\dots p}.$$

Ainsi, *le nombre des combinaisons de m objets p à p s'obtient en divisant par le produit des p premiers nombres le produit de p nombres entiers consécutifs dont le plus grand est m.*

Remarquons, en terminant, que le nombre des combinaisons de m objets p à p est égal au nombre des combinaisons de m objets $m-p$ à $m-p$: car, si l'on a m objets et qu'on associe ensemble p de ces objets, il en reste $m-p$; à chaque groupe de p objets correspond donc un groupe et un seul de $m-p$ objets, et réciproquement. On a donc bien

$$C_m^p = C_m^{m-p}.$$

Il est d'ailleurs facile de vérifier l'égalité des deux nombres

$$C_m^p = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-p+1)}{1.2.3\dots p},$$

$$C_m^{m-p} = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(p+1)}{1.2.3\dots(m-p)}.$$

Dans la pratique, lorsqu'on veut calculer le nombre des combinaisons de m objets p à p, on emploie la première ou la seconde de ces formules, suivant que p est inférieur ou supérieur à $m-p$.

Les deux formules sont identiques quand $p = m - p$, c'est-à-dire quand m est pair et $p = \frac{m}{2}$.

Exemples :

$$C_{11}^3 = \frac{11.10.9}{1.2.3} = 165;$$

$$C_{100}^{97} = C_{100}^3 = \frac{100.99.98}{1.2.3} = 161\,700.$$

Formule du binome.

21. m étant un entier positif, a et b deux nombres algébriques quelconques, la *formule du binome* sert à trouver le développement de la puissance $m^{\text{ième}}$ de $a+b$. On connaît déjà le développement de $(a+b)^2$ et celui de $(a+b)^3$; on pourrait calculer ensuite

celui de $(a+b)^4$, puis celui de $(a+b)^5$, etc. Mais il s'agit ici d'établir une règle d'après laquelle toute puissance de $a+b$, si haute soit-elle, puisse être obtenue sans qu'il soit nécessaire de faire le calcul pour toutes celles qui la précèdent.

Développons d'abord le produit

$$(a+b_1)(a+b_2)\dots(a+b_m).$$

On sait que le produit de plusieurs sommes de nombres algébriques est la somme des produits partiels que l'on obtient en prenant de toutes les manières possibles un terme et un seul dans chaque facteur, et en multipliant entre eux les termes ainsi choisis. Appliquons cette règle au produit précédent.

En prenant le premier terme dans chaque facteur, on obtient le produit partiel a^m; en prenant ensuite le premier terme dans $(m-1)$ facteurs et le second dans le facteur restant, on obtient les produits partiels $a^{m-1}b_1$, $a^{m-1}b_2$, ..., $a^{m-1}b_m$, dont la somme est

$$a^{m-1}(b_1+b_2+\dots+b_m);$$

en prenant le premier terme dans $(m-2)$ facteurs et le second dans les deux facteurs restants, on obtient les produits partiels $a^{m-2}b_1b_2$, $a^{m-2}b_1b_3$, ..., $a^{m-2}b_{m-1}b_m$, dont la somme est

$$a^{m-2}(b_1b_2+b_1b_3+\dots+b_{m-1}b_m);$$

etc. Si donc on désigne par S_1 la somme des seconds termes des facteurs, par S_2 la somme de leurs produits 2 à 2, par S_3 la somme de leurs produits 3 à 3, etc., on a la formule

$$(a+b_1)(a+b_2)\dots(a+bm) = a^m + a^{m-1}S_1 + a^{m-2}S_2 + \dots$$
$$+ a^{m-p}S_p + \dots + aS_{m-1} + b_1b_2\dots bm.$$

Si l'on y fait $b_1 = b_2 = \dots = b_m = b$, S_1 devient égal à mb, S_2 devient égal à b^2 multiplié par le nombre des combinaisons de m objets 2 à 2, S_3 devient égal à b^3 multiplié par le nombre des combinaisons de m objets 3 à 3, etc. On a donc

$$(a+b)^m = a^m + ma^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}b^2 + \dots$$
$$+ \frac{m(m-1)\dots(m-p+1)}{1.2\dots p}a^{m-p}b + \dots + b^m$$

ou

$$(1)\quad (a+b)^m = a^m + C_m^1a^{m-1}b + C_m^2a^{m-2}b^2 + \dots$$
$$+ C_m^pa^{m-p}b^p + \dots + C_m^mb^m.$$

C'est la formule du binome due à Newton.

Nous appellerons *coefficients* du développement de $(a+b)^m$ les nombres 1, C_m^1, C_m^2, ..., C_m^p, ..., C_m^m : 1 est le coefficient du pre-

mier terme, C_m^1 celui du second terme, C_m^2 celui du troisième terme, etc.

On voit que le développement commence par le terme a^m; dans les termes suivants, les puissances de a diminuent constamment d'une unité, les puissances de b augmentent d'autant, de sorte que la somme des exposants de a et de b est toujours la même et égale à m; et à la fin se trouve le terme b^m. Le nombre des termes est $m+1$. Ainsi, les termes du développement de $(a+b)^m$, dégagés des coefficients, se suivront dans l'ordre que voici :

$$a^m, \quad a^{m-1}b, \quad a^{m-2}b^2, \ldots, \quad ab^{m-1}, \quad b^m.$$

Quant aux coefficients, celui du premier terme est toujours égal à 1 et celui du second terme est toujours égal à m. Nous allons montrer à présent qu'il est facile, connaissant le coefficient d'un terme, de calculer celui du terme suivant.

Le $p^{\text{ième}}$ terme est

$$C_m^{p-1}a^{m-p+1}b^{p-1},$$

et le terme suivant est

$$C_m^p a^{m-p}b^p.$$

Or on a

$$C_m^p = C_m^{p-1} \times \frac{m-p+1}{p},$$

d'où il suit qu'*en multipliant le coefficient d'un terme par l'exposant de a dans ce terme et divisant le produit par l'exposant de b dans le terme suivant, on obtient le coefficient de ce dernier terme.*

Exemples :

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6,$$

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7.$$

On appelle *termes extrêmes* dans le développement de $(a+b)^m$ le premier et le dernier. Le second terme et l'avant-dernier, puis le 3e terme et celui qui précède l'avant-dernier, puis le 4e terme et celui qui précède celui qui précède l'avant-dernier, etc., sont dits *également éloignés des extrêmes*. Dans le développement de $(a+b)^m$, les coefficients de deux termes également éloignés des extrêmes sont toujours les mêmes.

En effet, le coefficient du second terme est C_m^1 et celui de l'avant-dernier est C_m^{m-1} : or $C_m^1 = C_m^{m-1}$. Le coefficient du troisième terme est C_m^2 et celui du terme qui précède l'avant-dernier est C_m^{m-2}, et l'on sait que $C_m^2 = C_m^{m-2}$, etc.

Une autre remarque à faire au sujet des coefficients du développement de $(a+b)^m$, c'est qu'ils croissent depuis le commencement jusqu'au milieu et qu'ensuite ils décroissent.

En effet, les coefficients des termes de rangs p et $p+1$ sont respectivement C_m^{p-1} et C_m^p. On a

$$C_m^p = C_m^{p-1}\frac{m-p+1}{p}.$$

Pour que C_m^p soit plus grand que C_m^{p-1}, il faut et il suffit que $\frac{m-p+1}{p}$ soit supérieur à 1, c'est-à-dire que $m-p$ ne soit pas plus petit que p. Or $m-p$, c'est le nombre des termes qui suivent le $(p+1)^{ième}$, et p, c'est le nombre des termes qui le précèdent. Ainsi, pour que le coefficient d'un terme soit supérieur à celui du terme qui le précède, il faut et il suffit qu'il n'y ait pas moins de termes après lui qu'avant lui.

D'après cela, dans les puissances paires, le plus grand coefficient est au milieu, tandis que, dans les puissances impaires, il y a au milieu deux coefficients égaux et plus grands que tous les autres.

Remarques. — 1° Si, dans la formule (1), on écrit $-b$ à la place de b, on obtient

$$(2)\quad (a-b)^m = a^m - C_m^1 a^{m-1}b + C_m^2 a^{m-2}b^2 - \dots + (-1)^p C_m^p a^{m-p}b^p + \dots + (-1)^m C_m^m b^m.$$

2° Si, dans la formule (1), on fait $a=1$ et $b=-1$, on trouve

$$2^m = 1 + C_m^1 + C_m^2 + \dots + C_m^m.$$

Ainsi la somme des coefficients du développement de $(a+b)^m$ est égale à 2^m.

3° Si, dans la formule (2), on fait $a=1$ et $b=-1$, on trouve

$$0 = 1 - C_m^1 + C_m^2 - \dots + (-1)^m C_m^m.$$

Ainsi, dans le développement de $(a+b)^m$, la somme des coefficients des termes de rang pair est égale à la somme des coefficients des termes de rang impair.

EXERCICES

1. Soit M un point situé dans le plan d'un triangle ABC. Désignons par x le nombre algébrique dont la valeur absolue mesure la distance de M à BC et dont le signe est + ou —, suivant que M et A sont ou non d'un même côté de la droite indéfinie BC ; appelons y et z les nombres analogues relatifs à CA et AB ; soit enfin a, b, c et S les nombres qui mesurent les côtés BC, CA, AB et la surface du triangle : démontrer que, quelle que soit la position du point M, on a

$$ax + by + cz = 2S.$$

2. Soit m lettres $a, b, c, \ldots, l$. On considère les 2^{m-1} expressions

$$a \pm b \pm c \pm \ldots \pm l.$$

Soit P leur produit : 1° P renferme symétriquement les lettres $a, b, c, \ldots, l$, c'est-à-dire qu'il ne change pas quand on échange deux quelconques de ces lettres ; 2° les lettres $a, b, c, \ldots, l$ n'entrent dans P qu'à des puissances paires. Former le produit P dans le cas particulier où $m = 3$.

Application : $a, b, c, \ldots, l$ étant des nombres rationnels positifs, trouver une fraction égale à $\dfrac{A}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b} \pm \sqrt{c} \pm \cdots \pm \sqrt{l}}$ et dont le dénominateur soit rationnel.

3. Soit A et B deux points sur un axe, dont les abscisses sont x_1, x_2 ; M étant un point quelconque de l'axe, on pose $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = -\lambda$, et on demande de calculer l'abscisse du point M. Quelle est, en particulier, l'abscisse du milieu de AB ?

4. Soit O, A, B trois points sur un axe, et M le milieu de AB; vérifier que l'on a

$$\overline{OA} \times \overline{OB} = (\overline{OM})^2 - (\overline{MA})^2.$$

5. Étant donné quatre nombres distincts x_1, x_2, x_3, x_4, on appelle rapport anharmonique de ces quatre nombres, et l'on représente par le symbole $R(x_1, x_2, x_3, x_4)$, le quotient $\dfrac{x_1 - x_3}{x_1 - x_4} : \dfrac{x_2 - x_3}{x_2 - x_4}$. Vérifier qu'il est différent de 0 et de 1 ; vérifier que, si on échange deux des nombres et les deux autres, il ne change pas ; vérifier ensuite que, si on échange les deux derniers nombres, il se change en son inverse ; vérifier enfin que, si on échange les deux nombres du milieu, le nouveau rapport anharmonique est égal à l'excès de l'unité sur l'ancien.

On conclut de là que les 24 rapports anharmoniques qu'on peut former avec 4 nombres distincts sont égaux 4 à 4, en sorte que 6 seulement d'entre eux peuvent être différents, et si on appelle ρ l'un quelconque d'entre eux, les 5 autres sont

$$\frac{1}{\rho}, \qquad 1 - \rho, \qquad \frac{1}{1-\rho}, \qquad \frac{\rho - 1}{\rho}, \qquad \frac{\rho}{\rho - 1}.$$

6. x_1, x_2, x_3, x_4 sont quatre nombres distincts ; a, b, a', b' sont des nombres quelconques, tels cependant que $ab' - a'b \neq 0$ et que $-\dfrac{b'}{a'}$ ne soit égal à aucun des nombres x_1, x_2, x_3, x_4; on calcule les quatre nombres

$$y_1 = \frac{ax_1 + b}{a'x_1 + b'}, \quad y_2 = \frac{ax_2 + b}{a'x_2 + b'}, \quad y_3 = \frac{ax_3 + b}{a'x_3 + b'}, \quad y_4 = \frac{ax_4 + b}{a'x_4 + b'}.$$

Démontrer que $R(y_1, y_2, y_3, y_4) = R(x_1, x_2, x_3, x_4)$.

7. Étant donné quatre points M, M', M'', M''' sur un axe, on appelle rapport anharmonique de ces quatre points et on représente par la notation (MM'M''M''') le quotient $\frac{\overline{MM''}}{\overline{MM'''}} : \frac{\overline{M'M''}}{\overline{M'M'''}}$. Calculer (MM'M''M''') connaissant les abscisses des quatre points.

Supposons que A et B soient deux points de l'axe dont les abscisses sont x_1 et x_2 et soit $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = -\lambda$, $\frac{\overline{M'A}}{\overline{M'B}} = -\lambda'$, etc. Calculer (MM'M''M''') connaissant $\lambda, \lambda', \lambda'', \lambda'''$.

8. Quand le rapport anharmonique de quatre points M, M', M'', M''' est égal à -1, on dit que les points M, M' sont conjugués harmoniques par rapport à M'', M'''. Montrer que si M, M' sont conjugués harmoniques par rapport à M'', M''', on a

$$2(xx' + x''x''') = (x + x')(x'' + x'''),$$

x, x', x'', x''' étant les abscisses de M, M', M'', M''' ;

$$\frac{2}{\overline{MM'}} = \frac{1}{\overline{MM''}} + \frac{1}{\overline{MM'''}};$$

$$(\overline{OM})^2 = \overline{OM''} \times \overline{OM'''}, \qquad \text{O étant le milieu de MM'}.$$

9. Trouver directement P_m en cherchant une relation entre P_m et P_{m-1}.

10. Trouver directement l'expression de C_m^p, soit en raisonnant comme pour les arrangements, soit en évaluant de deux manières différentes le nombre de fois que la lettre a est écrite dans les combinaisons p à p.

11. Démontrer que l'on a

$$C_m^p = C_{m-1}^p + C_{m-1}^{p-1};$$

$$C_m^p = C_{m-1}^{p-1} + C_{m-2}^{p-1} + \ldots + C_{p-1}^{p-1}.$$

12. Comment faut-il combiner m objets pour avoir le plus grand nombre possible de combinaisons ?

13. Si on multiplie une expression de la forme

$$a_0a^m + a_1a^{m-1}b + a_2a^{m-2}b^2 + \ldots + a_{m-1}ab^{m-1} + a_mb^m$$

par $a + b$, on obtient comme produit

$$a_0a^{m+1} + (a_1 + a_0)a^mb + (a_2 + a_1)a^{m-1}b^2 + \ldots + (a_m + a_{m-1})ab^m + a_mb^{m+1}.$$

Calculer, d'après cela, les coefficients du développement de $(a + b)^{m+1}$ connaissant ceux du développement de $(a + b)^m$.

Application. — Former un tableau contenant les coefficients des 10 premières puissances de $a + b$.

14. Calculer la somme

$$S_p = 1^p + 2^p + \ldots + n^p,$$

p étant un entier positif. On partira de la formule

$$(a+1)^{p+1} = a^{p+1} + C_{p+1}a^p + C_{p+1}^2 a^{p-1} + \ldots + C_{p+1}^p a + 1,$$

et on y fera successivement $a = 1, 2, 3, \ldots, n$, puis on ajoutera membre à membre. On aura ainsi une relation entre S_p, S_{p-1}, ..., S_1, qui permettra de calculer de proche en proche S_1, S_2, ... Donner les expressions de S_1, S_2, S_3.

15. Nombre des boulets sphériques d'une pile carrée, triangulaire ou rectangulaire.

II. — POLYNOMES

22. On appelle *expression algébrique* l'indication sur des lettres, à l'aide des signes des opérations, d'une suite quelconque de calculs à effectuer.

Une expression algébrique est dite *rationnelle* lorsqu'elle ne renferme aucun radical *portant sur des lettres*, *irrationnelle* dans le cas contraire. Ainsi $a+b$, $\frac{3}{2}ab$, $\frac{a^2+b^2}{a-b\sqrt{2}}$ sont des expressions rationnelles ; mais $\frac{a-2b\sqrt{a^2-b^2}}{5a^2+bc}$ est irrationnelle.

On appelle *valeur numérique* d'une expression algébrique, pour un système de valeurs numériques des lettres qu'elle renferme, le nombre algébrique que l'on obtient en remplaçant les lettres par les valeurs en question et effectuant les calculs indiqués. Par exemple, pour $a = +1$, $b = -1$, l'expression $\frac{a^2+b^2}{a-b\sqrt{2}}$ prend la valeur numérique $\frac{2}{1+\sqrt{2}}$.

Certaines expressions algébriques n'ont aucun sens pour certains systèmes de valeurs numériques attribuées aux lettres qui y entrent. Telle est, par exemple, l'expression $\frac{1}{a}$, qui n'a aucun sens pour $a = 0$; telle est encore l'expression $\sqrt{a-b}$, qui n'a aucun sens pour tout système de valeurs numériques rendant négative la différence $a-b$. On peut même imagi-

ner des expressions algébriques qui n'ont de sens pour aucun système de valeurs numériques attribuées aux lettres. *Ex.* : $\sqrt{-a^2+a-1}$; cette expression n'a de sens pour aucune valeur de a, car on a $-a^2+a-1=-\left(a-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}$, et l'on voit que, quelque nombre algébrique que l'on mette à la place de a, $-a^2+a-1$ sera toujours <0.

23. On appelle *polynome entier* ou simplement *polynome à une ou plusieurs variables* x, y, z, toute expression algébrique de la forme

$$(1)\qquad ax^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma}+a_1x^{\alpha_1}y^{\beta_1}z^{\gamma_1}+\cdots+a_nx^{\alpha_n}y^{\beta_n}z^{\gamma_n},$$

dans laquelle les lettres $a_1, a_2, \ldots, a_n$ désignent des nombres quelconques, positifs, nuls ou négatifs ; α, β, γ ; $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; ... ; $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ sont des nombres entiers positifs ou nuls ; enfin x, y, z sont des lettres auxquelles on peut attribuer telles valeurs que l'on veut. Si l'un des nombres $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$, — α_k par exemple — est nul, on convient de remplacer x^{α_k} par 1, et cela avant d'attribuer à x, y, z des valeurs particulières. Ainsi, $2x^0yz^3$ représente la même chose que $2yz^3$; $2x^0y^0z^0$ représente le nombre 2.

Les expressions algébriques $ax^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma}$, $a_1x^{\alpha_1}y^{\beta_1}z^{\gamma_1}$, ... sont les *termes* du polynome (1) ; a est le *coefficient* du terme $ax^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma}$, la somme $\alpha+\beta+\gamma$ en est le degré [1]. D'ordinaire, on n'écrit pas les coefficients $+1$ et -1 : ainsi dans x^2y^3z, $-x^3y$, où x, y, z sont les variables, $+1$ et -1 sont les coefficients.

On appelle *termes semblables* ceux qui contiennent les mêmes puissances des variables. Si le polynome (1), préalablement débarrassé de ses termes à coefficients nuls, renferme plusieurs termes semblables

$$a_ix^ly^mz^p,\quad a_jx^ly^mz^p,\quad a_kx^ly^mz^p,$$

---

[1] Par extension, les expressions algébriques A, B, C, ..., L s'appellent les *termes* de l'expression $A+B+C+\ldots+L$; dans l'expression $A\times B$, A s'appelle le *coefficient* de B, B le coefficient de A.

nous les remplacerons par le terme unique

$$(a_i + a_j + a_k)x^l y^m z^p,$$

que nous supprimerons à son tour si $a_i + a_j + a_k = 0$. Nous obtiendrons ainsi un polynome ne contenant plus ni termes semblables ni termes à coefficients nuls. Ce polynome, nous l'appellerons le *polynome réduit correspondant au polynome donné*. Remplacer le polynome donné par ce polynome réduit s'appelle faire *la réduction des termes semblables*. Soit $ax^\alpha y^\beta z^\gamma$ un terme du polynome réduit ; on dit que c'est *le terme en* $x^\alpha y^\beta z^\gamma$ *du polynome proposé*. Il est clair que la valeur numérique que prend le polynome réduit est toujours la même que celle que prend le polynome donné, quelles que soient les valeurs numériques attribuées aux variables. Suivant que le nombre des termes du polynome réduit est 1, 2 ou 3, le polynome proposé se nomme *monome*, *binome* ou *trinome*.

Polynome identiquement nul. — Lorsque, dans la réduction des termes semblables, tous les termes disparaissent, le polynome est dit *identiquement nul*. Un polynome identiquement nul prend la valeur numérique zéro, quelles que soient les valeurs numériques attribuées aux variables. La réciproque de cette proposition est vraie et sera démontrée plus tard.

Polynomes identiques. — On dit que deux polynomes en x, y, z sont *identiques*, quand les polynomes réduits correspondants sont formés avec les mêmes termes. Deux polynomes identiques prennent la même valeur numérique, quelles que soient les valeurs numériques attribuées aux variables. La réciproque de cette proposition (évidente pour deux monomes semblables) est vraie et sera démontrée plus tard.

Pour marquer que deux polynomes sont identiques, on les écrit l'un à côté de l'autre en les séparant par le signe $\equiv$.

Degré d'un polynome (non identiquement nul). — Évaluons dans le polynome réduit correspondant le degré de chaque terme ; le plus grand de ces degrés est le *degré du polynome*. Si, en particulier, tous les termes du polynome réduit sont de même degré, le polynome est dit *homogène*.

POLYNOMES A UNE VARIABLE.

24. Quand il n'y a qu'une variable x, il est souvent commode de ranger les termes du polynome réduit dans un ordre tel que les exposants de x aillent constamment en croissant ou constamment en décroissant. Cela s'appelle *ordonner* le polynome suivant les puissances croissantes ou décroissantes de x. Ainsi un polynome en x, de degré n, ordonné suivant les puissances décroissantes de x, est de la forme

$$ax^n + bx^r + \cdots + lx^s \quad (a \neq 0, \quad n > r > \cdots > s).$$

D'après les définitions données précédemment, l'*identité*

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n \equiv b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n$$

équivaut aux $n+1$ égalités

$$a_0 = b_0, \qquad a_1 = b_1, \qquad \cdots, \qquad a_n = b_n;$$

en particulier, l'identité $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n \equiv 0$ équivaut à $a_0 = 0$, $a_1 = 0$, $\cdots$, $a_n = 0$.

Addition, Soustraction et Multiplication des polynomes à une variable.

25. On fait sur les polynomes à une variable des opérations analogues à celles qu'on fait en arithmétique sur les nombres entiers : on les ajoute, on les retranche, on les multiplie. Nous allons définir ces opérations et en indiquer les principales propriétés.

Nous désignerons souvent un polynome en x par la notation $f(x)$ (qui se prononce : f de x), ou $g(x)$, ou $\varphi(x)$. Nous conviendrons que $+f(x)$ représente le même polynome que $f(x)$, que $-f(x)$ représente le polynome qu'on obtient en remplaçant, dans $f(x)$, chaque coefficient par le nombre opposé. Ainsi, si $f(x)$ désigne le polynome $2x^3 - 3x + 1$, $-f(x)$ voudra dire $-2x^3 + 3x - 1$. Enfin nous désignerons par $f(a)$ la valeur que prend le polynome $f(x)$ quand on y remplace x par a.

Addition.

26. Étant donné plusieurs polynomes *réduits* $f(x)$, $g(x)$, ..., si on considère le polynome $s(x)$ dans lequel le coefficient de x^α est, quel que soit α, la somme des coefficients de x^α dans les polynomes proposés, il est clair que la valeur numérique que prend le polynome $s(x)$ est égale à la somme des valeurs numériques de $f(x)$, $g(x)$, ..., quelle que soit la valeur numérique attribuée à x. Il est dès lors naturel d'appeler ce polynome $s(x)$ la *somme* des polynomes proposés, et d'écrire

$$s(x) \equiv f(x) + g(x) + \dots .$$

Si l'un des polynomes ne contient pas de terme en x^α, il n'y a pas à en tenir compte dans le calcul du coefficient de x^α.

Par exemple, la somme des deux polynomes $2x^3 - 3x + 1$, $12x^2 - 5x - 3$ est le polynome $2x^3 + 12x^2 - 8x - 2$. *Ajouter* plusieurs polynomes, c'est calculer leur somme. Quand on a à ajouter plusieurs polynomes non réduits, on leur substitue les polynomes réduits correspondants. Tout polynome est la somme de ses termes.

Dans la pratique, pour calculer la somme de plusieurs polynomes (réduits), on les ordonne tous de la même manière et on les place les uns au-dessous des autres de manière que les termes semblables se correspondent. De cette façon, on peut ordonner le polynome $s(x)$ en même temps qu'on fait l'addition :

$$\begin{array}{rl} f(x) \equiv & 2x^3 \qquad\qquad - 3x + 1, \\ g(x) \equiv & \qquad\quad 12x^2 - 5x - 3; \\ \hline s(x) \equiv & 2x^3 + 12x^2 - 8x - 2. \end{array}$$

La somme de plusieurs polynomes est indépendante de leur ordre; dans une somme de polynomes, on peut remplacer tels polynomes que l'on veut par leur somme ; au lieu d'ajouter à un polynome une somme de polynomes, on peut lui ajouter successivement les différentes parties de la somme. Tout cela découle de la définition d'une somme de polynomes.

Il est clair encore que, quels que soient les polynomes $f(x)$, $g(x)$, ..., on a

$$[-f(x)] + [-g(x)] + \ldots \equiv -[f(x) + g(x) + \ldots].$$

La somme de deux polynomes $f(x)$, $g(x)$ n'est identiquement nulle que si l'on a $g(x) \equiv -f(x)$.

Enfin, si la somme de plusieurs polynomes $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ n'est pas un polynome identiquement nul, *son degré est tout au plus égal au degré de celui ou ceux des polynomes* f, g, h *dont le degré est le plus grand*. Si f, g, h ont le même degré, le degré de $f+g+h$ est au plus égal à ce degré commun. Car soit n, r, s les degrés des polynomes f, g, h; si l'on a $n > r$ et $n > s$, le degré de $f+g+h$ est n, parce que le terme de plus haut degré de cette somme est le même que le terme de plus haut degré de f. Supposons maintenant $n = r > s$; alors le degré de $f+g+h$ n'est pas supérieur à n, mais il peut lui être inférieur. Car, ax^n et bx^n étant les termes de plus haut degré de f et de g, le terme en x^n dans $f+g+h$ est $(a+b)x^n$; il disparaît si $a+b=0$, et le degré de $f+g+h$ est alors inférieur à n. Supposons enfin $n = r = s$; alors, comme précédemment, le degré de $f+g+h$ ne peut pas être supérieur à n, mais il peut lui être inférieur. Car soit ax^n, bx^n, cx^n les termes de plus haut degré dans f, g, h; le terme en x^n dans $f+g+h$ est $(a+b+c)x^n$; il disparaît si $a+b+c=0$.

Soustraction.

27. Étant donné un premier polynome $f(x)$ et un second $g(x)$, il existe un polynome et un seul, $h(x)$, tel que l'on ait

$$f(x) \equiv g(x) + h(x).$$

Ce polynome $h(x)$ s'obtient en ajoutant à $f(x)$ le polynome $-g(x)$:

$$h(x) \equiv f(x) + [-g(x)].$$

$h(x)$ s'appelle *l'excès de* $f(x)$ *sur* $g(x)$ et se représente par la notation $f(x) - g(x)$.

On désigne souvent sous le nom un peu vague de *différence* entre les polynomes $f(x)$ et $g(x)$, le polynome $f(x) - g(x)$ ou le polynome $g(x) - f(x)$. La différence entre deux polynomes identiques est identiquement nulle et réciproquement. Si f et g ne sont pas identiques, le degré de la différence $f - g$ est tout au plus égal au degré de celui des polynomes f, g dont le degré est le plus grand. Si les polynomes f et g ont le même degré, le degré de $f - g$ est au plus égal à ce degré commun.

Pour retrancher d'un polynome $F(x)$ une somme de polynomes, $f(x) + g(x) + h(x)$, on peut ajouter au polynome F les polynomes $-f$, $-g$, $-h$:

$$F(x)-[f(x)+g(x)+h(x)] \equiv F(x)+[-f(x)]+[-g(x)]+[-h(x)].$$

Multiplication.

28. Étant donné plusieurs polynomes (réduits) $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, dont aucun n'est identiquement nul, associons, de toutes les manières possibles, un terme ax^α de $f(x)$ à un terme bx^β de $g(x)$ et à un terme cx^γ de $h(x)$, et à chacune de ces combinaisons ax^α, bx^β, cx^γ faisons correspondre le monome $abcx^{\alpha+\beta+\gamma}$. La somme de tous ces monomes sera un polynome $p(x)$ dont la valeur numérique sera évidemment égale au produit des valeurs numériques de $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, quelle que soit la valeur numérique attribuée à x. Nous l'appellerons pour cette raison le *produit* des polynomes $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ et nous écrirons

$$p(x) \equiv f(x).g(x).h(x).$$

Les polynomes f, g, h sont les *facteurs* du produit.

Le produit de plusieurs polynomes est évidemment indépendant de leur ordre. *Il ne change pas quand on remplace plusieurs de ces polynomes par leur produit effectué.* Soit $p_1(x)$ le produit $f(x)g(x)$, et soit $ab + a'b' + a''b'' + \dots$ le coefficient de $x^{\alpha+\beta}$ dans ce polynome. Le polynome $p(x)$ est une somme d'expressions de la forme

$$abcx^{\alpha+\beta+\gamma} + a'b'cx^{\alpha+\beta+\gamma} + a''b''cx^{\alpha+\beta+\gamma} + \cdots$$
$$= (ab + a'b' + a''b'' + \cdots)cx^{(\alpha+\beta)+\gamma} :$$



il est donc identique au produit de $\Sigma(ab + a'b' + a''b'' + \cdots)x^{\alpha+\beta}$ ou $p_1(x)$ par Σcx^{γ} ou $h(x)$.

Dans la pratique, pour former le produit de deux polynomes, on multiplie le multiplicande successivement par chaque terme du multiplicateur et on additionne les produits partiels ainsi obtenus. Pour mettre de l'ordre dans les calculs et faciliter la réduction des termes semblables, on ordonne le multiplicande et le multiplicateur de la même façon et on dispose les produits partiels de manière que les termes semblables se trouvent les uns sous les autres.

Soit, par exemple, à multiplier les deux polynomes

$$3x^3 - 5x + 1 - 2x^2, \qquad 3 - 4x + 2x^2.$$

On les ordonnera par rapport aux puissances décroissantes de x et on disposera l'opération de la manière suivante :

$$\begin{array}{lrrrrrr}
\textit{Multiplicande} \ldots & 3x^3 - & 2x^2 - & 5x + & 1 & & \\
\textit{Multiplicateur} \ldots & 2x^2 - & 4x + & 3 & & & \\
\hline
 & 6x^5 - & 4x^4 - & 10x^3 + & 2x^2 & & \\
\textit{Produits partiels} \ldots & & -12x^4 + & 8x^3 + & 20x^2 - & 4x & \\
 & & & +9x^3 - & 6x^2 - & 15x + & 3 \\
\hline
\textit{Produit} \ldots & 6x^5 - & 16x^4 + & 7x^3 + & 16x^2 - & 19x + & 3.
\end{array}$$

Soit encore à calculer le produit de

$$5x^5 - 3x^4 - 2x^2 + x + 1 \qquad \text{par} \qquad -4x + 5x^3.$$

Ici, le multiplicande ne contient pas de terme en x^3 : il est, comme on dit, *incomplet*. En écrivant le premier produit partiel, nous laisserons de la place pour le terme en x^6 qui se présente dans le second produit partiel :

$$\begin{array}{rrrrrrrr}
5x^5 - & 3x^4 - & 2x^2 + x + 1 & & & & & \\
5x^3 - & 4x & & & & & & \\
\hline
25x^8 - & 15x^7 & & -10x^5 + & 5x^4 + & 5x^3 & & \\
 & & -20x^6 + & 12x^5 & & +8x^3 - & 4x^2 - & 4x \\
\hline
25x^8 - & 15x^7 - & 20x^6 + & 2x^5 + & 5x^4 + & 13x^3 - & 4x^2 - & 4x.
\end{array}$$

Pour calculer le produit de n polynomes, on remplace deux des polynomes par leur produit et on est ramené à calculer un produit de $n - 1$ facteurs.

29. Soit ax^n, bx^r, cx^s les termes de plus haut degré de f, g, h : $abcx^{n+r+s}$ sera un terme de $p(x)$; ce terme ne se réduira avec aucun autre, et son degré sera supérieur à celui de tous les autres monomes dont $p(x)$ est la somme. $n+r+s$ est donc le degré de $p(x)$. Donc :

1° *Le degré du produit de plusieurs polynomes est égal à la somme des degrés des facteurs;*

2° *Dans le produit de plusieurs polynomes, le coefficient du terme de plus haut degré est égal au produit des coefficients des termes de plus haut degré des facteurs.*

De même, le terme de plus bas degré du produit a respectivement pour degré et pour coefficient la somme des degrés et le produit des coefficients des termes de plus bas degré des facteurs.

Il suit de là que *le produit de plusieurs polynomes dont aucun n'est identiquement nul n'est pas identiquement nul.* Par définition, le produit de plusieurs polynomes dont l'un est identiquement nul est identiquement nul.

Enfin les règles relatives à la multiplication d'une somme de polynomes par un polynome ou d'une somme de polynomes par une autre somme de polynomes sont les mêmes que les règles analogues relatives aux nombres algébriques :

$$[f(x)+g(x)]h(x) \equiv f(x)h(x)+g(x)h(x);$$
$$[f(x)+g(x)][h(x)+k(x)] \equiv f(x)h(x)+g(x)h(x)+f(x)k(x)+g(x)k(x).$$

On remarquera encore que l'on a

$$f(x)[-g(x)] \equiv -[f(x)g(x)],$$
$$[-f(x)][-g(x)] \equiv f(x)g(x).$$

On appelle *puissance* $n^{\text{ième}}$ d'un polynome $f(x)$ et on désigne par le symbole $[f(x)]^n$ le produit de n facteurs identiques à $f(x)$. On a évidemment

$$[f(x)]^n[f(x)]^{n'} \equiv [f(x)]^{n+n'},$$
$$[[f(x)]^n]^{n'} \equiv [f(x)]^{nn'},$$
$$[f(x)]^n[g(x)]^n \equiv [f(x)\times g(x)]^n.$$

Addition, soustraction et multiplication des polynomes à plusieurs variables.

30. Nous représentons un polynome à plusieurs variables x, y, z par la notation $f(x, y, z)$. $+f(x, y, z)$ représente le même polynome que $f(x, y, z)$, et $-f(x, y, z)$ représente le polynome qu'on obtient en remplaçant dans f chaque coefficient par le nombre opposé. Enfin $f(a, b, c)$ représente la valeur que prend le polynome $f(x, y, z)$ pour $x = a$, $y = b$, $z = c$.

On appelle *somme* de plusieurs polynomes réduits $f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$, ... le polynome $s(x, y, z)$ dans lequel le coefficient de $x^\alpha y^\beta z^\gamma$ est égal, quels que soient α, β, γ, à la somme des coefficients de $x^\alpha y^\beta z^\gamma$ dans les polynomes proposés. On écrit $s(x, y, z) \equiv f(x, y, z) + g(x, y, z) + \ldots$. Les propriétés d'une somme de polynomes énoncées dans le cas d'une variable subsistent quel que soit le nombre des variables.

On appelle de même *excès d'un polynome* $f(x, y, z)$ *sur un autre polynome* $g(x, y, z)$ le polynome $h(x, y, z)$ tel qu'on ait $f(x, y, z) \equiv g(x, y, z) + h(x, y, z)$, on l'obtient en ajoutant à $f(x, y, z)$ le polynome $-g(x, y, z)$, et on le représente par la notation $f(x, y, z) - g(x, y, z)$. Les propriétés énoncées dans le cas d'une seule variable subsistent.

Enfin soit $f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$, $h(x, y, z)$ plusieurs polynomes réduits; associons, de toutes les manières possibles, un terme $ax^\alpha y^{\alpha'} z^{\alpha''}$ de f à un terme $bx^\beta y^{\beta'} z^{\beta''}$ de g et à un terme $cx^\gamma y^{\gamma'} z^{\gamma''}$ de h, et à chaque telle combinaison faisons correspondre le monome $abcx^{\alpha+\beta+\gamma} y^{\alpha'+\beta'+\gamma'} z^{\alpha''+\beta''+\gamma''}$. On appelle *produit* des polynomes f, g, h le polynome $p(x, y, z)$ somme de tous ces monomes. On écrit

$$p(x, y, z) \equiv f(x, y, z) . g(x, y, z) . h(x, y, z).$$

Soit n, r, s les degrés de f, g, h. *Le degré de* $p(x, y, z)$ *est* $n + r + s$. En effet, remarquons d'abord qu'aucun des monomes dont $p(x, y, z)$ est la somme n'a un degré supérieur à $n + r + s$, de sorte que le degré de $p(x, y, z)$ n'est pas supérieur à $n + r + s$. Si un seul de ces monomes est de degré

$n+r+s$, le théorème est démontré. Si plusieurs de ces monomes sont de degré $n+r+s$, nous allons prouver que l'un d'eux ne se réduit avec aucun autre. Soit α l'exposant de la plus haute puissance de x qui entre dans les termes de degré n de f, α' l'exposant de la plus haute puissance de y qui entre dans ceux de ces termes renfermant x à la puissance α, α'' l'exposant de z dans celui de ces termes renfermant x à la puissance α et y à la puissance α'; soit $ax^{\alpha}y^{\alpha'}z^{\alpha''}$ ce terme. Appelons $bx^{\beta}y^{\beta'}z^{\beta''}$ et $cx^{\gamma}y^{\gamma'}z^{\gamma''}$ les termes de g et de h formés d'une manière analogue. $abcx^{\alpha+\beta+\gamma}y^{\alpha'+\beta'+\gamma'}z^{\alpha''+\beta''+\gamma''}$ est un terme de p, dont le degré est $n+r+s$. Il est facile de montrer qu'il ne se réduit avec aucun autre. Pour cela, considérons, parmi les termes de degré $n+r+s$ de p, un terme autre que le précédent. Appelons $a_1x^{\alpha_1}y^{\alpha'_1}z^{\alpha''_1}$, $b_1x^{\beta_1}y^{\beta'_1}z^{\beta''_1}$, $c_1x^{\gamma_1}y^{\gamma'_1}z^{\gamma''_1}$ les termes de f, g, h qui ont servi à le former, de sorte que

$$\alpha_1+\beta_1+\gamma_1+\alpha'_1+\beta'_1+\gamma'_1+\alpha''_1+\beta''_1+\gamma''_1$$
$$=\alpha+\beta+\gamma+\alpha'+\beta'+\gamma'+\alpha''+\beta''+\gamma''.$$

On a

$$\alpha_1 \leqslant \alpha, \qquad \beta_1 \leqslant \beta, \qquad \gamma_1 \leqslant \gamma.$$

Si les trois égalités n'ont pas lieu simultanément, on en conclut

$$\alpha_1+\beta_1+\gamma_1 < \alpha+\beta+\gamma,$$

et le théorème est démontré. Supposons que les trois égalités aient lieu simultanément ; alors

$$\alpha'_1 \leqslant \alpha', \qquad \beta'_1 \leqslant \beta', \qquad \gamma'_1 \leqslant \gamma'.$$

On ne peut pas avoir à la fois

$$\alpha'_1 = \alpha', \qquad \beta'_1 = \beta', \qquad \gamma'_1 = \gamma',$$

car on aurait

$$\alpha''_1 \leqslant \alpha'', \qquad \beta''_1 \leqslant \beta'', \qquad \gamma''_1 \leqslant \gamma'',$$
$$\alpha''_1+\beta''_1+\gamma''_1 = \alpha''+\beta''+\gamma'',$$

et par suite

$$\alpha''_1 = \alpha'', \qquad \beta''_1 = \beta'', \qquad \gamma''_1 = \gamma'',$$

et les termes $a_1x^{\alpha_1}y^{\alpha'_1}z^{\alpha''_1}$, $b_1x^{\beta_1}y^{\beta'_1}z^{\beta''_1}$, $c_1x^{\gamma_1}y^{\gamma'_1}z^{\gamma''_1}$ seraient respectivement identiques aux termes $ax^{\alpha}y^{\alpha'}z^{\alpha''}$, $bx^{\beta}y^{\beta'}z^{\beta''}$, $cx^{\gamma}y^{\gamma'}z^{\gamma''}$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Dès lors, on a

$$\alpha'_1+\beta'_1+\gamma'_1 < \alpha'+\beta'+\gamma',$$

et le théorème est démontré.

Division de deux polynomes à une variable.

31. Étant donné un premier polynome $f(x)$ appelé *dividende* et un second $g(x)$ appelé *diviseur*, diviser $f(x)$ par $g(x)$, c'est trouver un polynome $Q(x)$ appelé *quotient*, tel que la différence $f(x) - g(x)Q(x)$ soit identiquement nulle ou d'un degré inférieur à celui de g.

Cette définition est analogue à celle de la division de deux nombres entiers. En arithmétique, l'existence du quotient de deux nombres entiers est évidente. En algèbre, l'existence du polynome $Q(x)$ a besoin d'être démontrée.

Soit n le degré de f, p celui de g. Pour $n < p$, le polynome $f - gQ$ ne peut pas être identiquement nul; pour qu'il soit de degré moindre que p, il faut que $Q(x)$ soit identiquement nul. Supposons $n \geqslant p$. Je dis qu'il n'existe pas plus d'un polynome Q tel que $f - gQ$ soit identiquement nul ou de degré moindre que p. Car supposons qu'il en existe deux, Q et Q', non identiques. Chacun des deux polynomes $f - gQ$, $f - gQ'$ étant identiquement nul ou de degré moindre que p, leur différence $g(Q' - Q)$, qui n'est pas identiquement nulle, serait d'un degré moindre que p, ce qui est impossible.

Nous allons montrer à présent qu'il existe toujours un polynome $Q(x)$ tel que $f - gQ$ soit identiquement nul ou de degré moindre que p.

Il faut pour cela que Q soit de degré $n - p$: car s'il était de degré moindre que $n - p$, le terme en x^n de f ne se réduirait pas, et s'il était de degré supérieur à $n - p$: il y aurait dans $f - gQ$ un terme de degré supérieur à n qui ne se réduirait avec aucun autre.

Il s'agit donc de faire voir qu'on peut calculer les coefficients et les degrés des termes d'un polynome Q de degré $n - p$ de telle manière que, dans la différence $f - gQ$, les coefficients de x^n, x^{n-1}, ..., x^p soient nuls.

Le coefficient de x^n dans $f - gQ$ est égal au coefficient de x^n dans f, moins le produit du coefficient de x^p dans g par

le coefficient de x^{n-p} dans Q. Ce coefficient sera nul si le coefficient de x^{n-p} dans Q est égal au quotient du coefficient de x^n dans f par le coefficient de x^p dans g, et seulement dans ce cas. Soit a ce quotient. Posons

$$f_1(x) \equiv f(x) - g(x) \times ax^{n-p}.$$

Si le polynome $f_1(x)$, que l'on sait calculer, est identiquement nul, ou si son degré n_1, qui est évidemment moindre que n, est moindre que p, le polynome ax^{n-p} répond à la question. Supposons $n_1 \geqslant p$, et montrons que l'on peut calculer un polynome Q_1 tel que $f_1 - gQ_1$ soit identiquement nul ou de degré moindre que p; l'identité

$$f_1 - gQ_1 \equiv f - g(ax^{n-p} + Q_1)$$

montrera dès lors que le polynome $ax^{n-p} + Q_1$ répond à la question. Q_1 doit nécessairement être de degré $n_1 - p$, et le coefficient a_1 de x^{n_1-p} dans Q_1 doit être égal au quotient du coefficient du terme de plus haut degré dans f_1 par le coefficient du terme de plus haut degré dans g. Posons

$$f_2(x) \equiv f_1(x) - g(x) \times a_1x^{n_1-p}.$$

Si f_2 est identiquement nul, ou si son degré n_2, qui est évidemment $< n_1$, est moindre que p, le polynome

$$ax^{n-p} + a_1x^{n_1-p}$$

répond à la question et l'on a

$$f_2(x) \equiv f(x) - g(x)(ax^{n-p} + a_1x^{n_1-p}).$$

Supposons $n_2 \geqslant p$, et montrons que l'on peut calculer un polynome Q_2 tel que $f_2 - gQ_2$ soit identiquement nul ou de degré moindre que p : l'identité

$$f_2 - gQ_2 \equiv f_1 - g(a_1x^{n_1-p} + Q_2) \equiv f - g(ax^{n-p} + a_1x^{n_1-p} + Q_2)$$

montrera dès lors que le polynome $ax^{n-p} + a_1x^{n_1-p} + Q_2$ répond à la question. Q_2 est nécessairement de degré $n_2 - p$, et le coefficient a_2 de x^{n_2-p} dans Q_2 est égal au quotient du coefficient du terme de plus haut degré dans f_2 par le coefficient du terme de plus haut degré dans g. Posons

$$f_3(x) \equiv f_2(x) - g(x) \times a_2x^{n_2-p}.$$

Si f_3 est identiquement nul ou de degré moindre que p, le polynome $ax^{n-p} + a_1x^{n_1-p} + a_2x^{n_2-p}$ répond à la question et l'on a

$$f_3(x) \equiv f(x) - g(x)(ax^{n-p} + a_1x^{n_1-p} + a_2x^{n_2-p}).$$

Et ainsi de suite.

Comme les degrés des polynomes f_1, f_2, ... vont toujours en diminuant, on arrivera sûrement, après un nombre limité d'opérations, à trouver un polynome $f_r(x)$ identiquement nul ou dont le degré n_r sera moindre que p ; alors le polynome

$$ax^{n-p} + a_1x^{n_1-p} + \cdots + a_{r-1}x^{n_{r-1}-p}$$

répond à la question, et l'on a

$$f_r(x) \equiv f(x) - g(x)(ax^{n-p} + a_1x^{n_1-p} + \cdots + a_{r-1}x^{n_{r-1}-p}).$$

32. Règle pratique pour calculer le quotient. — *On ordonne les polynomes f et g par rapport aux puissances décroissantes de x. On divise le coefficient du premier terme de f par le coefficient du premier terme de g, on retranche de l'exposant du premier terme de f l'exposant du premier terme de g, ce qui donne le coefficient et l'exposant du premier terme du quotient, ax^{n-p}. On multiplie le diviseur par le premier terme du quotient et on retranche le produit obtenu du dividende; on a ainsi un premier* DIVIDENDE PARTIEL *f_1, sur lequel on opère comme sur le dividende donné, ce qui fournit le second terme du quotient, $a_1x^{n_1-p}$. On retranche du premier dividende partiel le produit du diviseur par le second terme du quotient, ce qui donne le second dividende partiel f_2. Et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à un dividende partiel f_r nul identiquement ou de degré moindre que p, ce qui ne peut manquer d'arriver. En posant*

$$Q \equiv ax^{n-p} + a_1x^{n_1-p} + \cdots + a_{r-1}x^{n_{r-1}-p},$$

on a $f_r \equiv f - gQ$. Q est le quotient cherché. Il est de degré $n - p$.

Remarque. — Les coefficients du quotient sont des fractions dans lesquelles le dénominateur est toujours égal au coefficient du terme de plus haut degré du diviseur. Il suit de là que,

lorsque les coefficients du dividende et du diviseur sont entiers, et que le coefficient du terme de plus haut degré du diviseur est ± 1, tous les coefficients des dividendes partiels et du quotient sont entiers.

33. Le polynome $f - gQ$ s'appelle le *reste* de la division. Ce polynome est identique à f_r. Le dividende $f(x)$, le diviseur $g(x)$, le quotient $Q(x)$ et le reste $R(x)$ d'une division sont liés par la relation identique

$$(1) \qquad f(x) \equiv g(x)Q(x) + R(x).$$

Ainsi, *étant donné deux polynomes quelconques* f, g, *il existe toujours un système de deux polynomes* Q, R *tels que l'on ait l'identité* (1), R *étant identiquement nul ou de degré inférieur au degré de* g. Il est facile de voir qu'*il n'en existe qu'un*. Admettons en effet qu'il en existe un second, Q', R' : on aurait

$$(2) \qquad f(x) \equiv g(x)Q'(x) + R'(x),$$

R' étant identiquement nul ou de degré inférieur au degré de g, et chacun des deux polynomes $f - gQ$, $f - gQ'$ serait identiquement nul ou de degré inférieur au degré de g; cela n'est possible que si Q' est identique à Q; mais alors R' est identique à R.

Si donc quatre polynomes f, g, Q, R satisfont à l'identité (1), si de plus le degré de R est moindre que celui de g, Q est le quotient et R le reste de la division de f par g. Supposons maintenant le degré de R supérieur ou égal au degré de g, et appelons Q' le quotient et R' le reste de la division de R par g; on a

$$R \equiv gQ' + R', \qquad \text{d'où} \qquad f \equiv g(Q + Q') + R';$$

le degré de R' étant moindre que celui de g, cette identité montre que $Q + Q'$ est le quotient et R' le reste de la division de f par g. — Il est presque inutile de faire remarquer que, si l'on demande simplement un système de polynomes Q, R satisfaisant à l'identité (1), sans imposer à R l'obligation d'être de degré inférieur à celui de g, il y a une infinité de solutions : on

prendra arbitrairement le polynome Q, puis on prendra pour R le polynome $f - gQ$.

Dans le cas particulier où R est identiquement nul, on a $f \equiv gQ$. On dit alors que f est *divisible* par g, que f est un *multiple* de g, que g est un *diviseur* ou un *sous-multiple* de f, que *la division de f par g se fait exactement*. Toutes ces locutions sont équivalentes et signifient ceci : f est identique au produit de g par un polynome.

Lorsque R n'est pas identiquement nul, son degré est $p - 1$, ou $p - 2$, ..., ou 1, ou 0.

Remarque. — Que f soit ou non divisible par g, si on divise le coefficient du terme de plus haut degré de f par le coefficient du terme de plus haut degré de g, et si on retranche le degré du terme de plus haut degré de g de celui du terme de plus haut degré de f, on obtient toujours le coefficient et le degré du terme de plus haut degré de Q. Lorsque f est divisible par g, la même règle appliquée aux termes de plus bas degré de f et de g donne le terme de plus bas degré du quotient. Si, d'après cela, le degré du terme de plus bas degré de f est inférieur au degré du terme de plus bas degré de g, la division ne se fait pas exactement. Dans le cas contraire, on peut diviser les coefficients et retrancher les degrés des termes de plus bas degré de f et de g ; mais on n'est sûr d'obtenir ainsi le terme de plus bas degré du quotient que si la division de f par g se fait exactement.

34. *Exemple* I. — Soit à diviser $6x^4 - 11x^3 - 24x^2 + 5x + 13$ par $3x^2 + 2x - 7$.

Le premier terme du quotient est $2x^2$. Multiplions le diviseur par $2x^2$, ce qui donne $6x^4 + 4x^3 - 14x^2$, que nous retranchons du dividende. Nous obtenons ainsi un premier dividende partiel, $-15x^3 - 10x^2 + 5x + 13$. Le deuxième terme du quotient est $-5x$. Multiplions le diviseur par $-5x$, ce qui donne le produit $-15x^3 - 10x^2 + 35x$, que nous retranchons du premier dividende partiel. La différence est le polynome $-30x + 13$. Comme son degré est inférieur au degré

du diviseur, c'est le reste de l'opération. Ainsi le quotient cherché est $2x^2 - 5x$, et le reste est $-30x + 13$. Voici la disposition de l'opération :

Dividende :	$6x^4 - 11x^3 - 24x^2 + 5x + 13$	$3x^2 + 2x - 7$ *Diviseur*
		$2x^2 - 5x$ *Quotient*
Produit changé de signe du divis^r par le 1er terme du quotient :	$-6x^4 - 4x^3 + 14x^2$	
1er dividende partiel :	$-15x^3 - 10x^2 + 5x + 13$	
Produit changé de signe du divis^r par le 2e terme du quotient :	$+15x^3 + 10x^2 - 35x$	
Reste :	$-30x + 13$	

D'ordinaire, on n'écrit de chacun des dividendes partiels que les termes qui se trouvent modifiés par la réduction des termes semblables. On omet aussi les produits changés de signe du terme de plus haut degré du diviseur par les termes successifs du quotient. Voici par exemple comment se réduit le tableau du calcul précédent :

$$\begin{array}{rrrrr|l}
6x^4 & -11x^3 & -24x^2 & +5x & +13 & 3x^2 + 2x - 7 \\
\cline{6-6}
 & -4x^3 & +14x^2 & & & 2x^2 - 5x \\
\cline{1-3}
 & -15x^3 & -10x^2 & & & \\
 & & +10x^2 & -35x & & \\
\cline{3-4}
 & & & -30x & &
\end{array}$$

Exemple II. — Diviser $5x^6 - 4x^3 - 7$ par $x^3 - x + 1$. Ici le dividende est incomplet : il ne contient pas de terme en x^5, ni en x^4, ni en x^2, ni en x. Nous laisserons de la place pour les termes en x^5, x^4, x^2, x qui pourraient se présenter dans le courant de l'opération :

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
5x^6 & & -4x^3 & & & -7 & x^3 - x + 1 \\
\cline{7-7}
 & +5x^4 & -5x^3 & & & & 5x^3 + 5x - 9 \\
\cline{1-3}
 & 5x^4 & -9x^3 & & & & \\
 & & & 5x^2 & -5x & & \\
\cline{3-5}
 & & -9x^3 & +5x^2 & -5x & & \\
 & & & & -9x & +9 & \\
\cline{3-6}
 & & & 5x^2 & -14x & +2 &
\end{array}$$

Exemple III. — Les coefficients ne sont pas tous numériques :

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 - abx^2 \quad + ax \quad - b & 3x^2 - 2abx + a \\
\cline{2-2}
\quad \dfrac{2ab}{3}x^2 - \dfrac{a}{3}x & \dfrac{x}{3} - \dfrac{ab}{9} \\
\cline{1-1}
-\dfrac{ab}{3}x^2 + \dfrac{2a}{3}x & \\
\qquad -\dfrac{2a^2b^2}{9}x + \dfrac{a^2b}{9} & \\
\cline{1-1}
\left(\dfrac{2a}{3} - \dfrac{2a^2b^2}{9}\right)x - b + \dfrac{a^2b}{9} &
\end{array}
$$

Exemple IV. — La division se fait exactement :

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 \qquad\qquad\qquad + 4a^4 & x^2 + 2ax + 2a^2 \\
\cline{2-2}
-2ax^3 - 2a^2x^2 & x^2 - 2ax + 2a^2 \\
\cline{1-1}
-2ax^3 - 2a^2x^2 & \\
\qquad + 4a^2x^2 + 4a^3x & \\
\cline{1-1}
\qquad + 2a^2x^2 + 4a^3x & \\
\qquad\qquad - 4a^3x - 4a^4 & \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

35. *Diviser un polynome* f *successivement par les polynomes* g, h, k, c'est diviser f par g, puis le quotient par h, puis le quotient de cette nouvelle division par k, etc.

Théorème. — *Si on divise un polynome* f *successivement par plusieurs autres* g, h, k (qui ne sont pas nécessairement différents), *le dernier quotient obtenu est aussi le quotient de la division de* f *par le produit* ghk.

En effet, on a les identités

(1) $$f \equiv gQ_1 + R_1,$$

(2) $$Q_1 \equiv hQ_2 + R_2,$$

(3) $$Q_2 \equiv kQ_3 + R_3,$$

les degrés des polynomes R_1, R_2, R_3 étant moindres respectivement que ceux de g, h, k. De ces identités on déduit la suivante :

$$f \equiv g[h(kQ_3 + R_3) + R_2] + R_1,$$

ou

$$f \equiv ghk.Q_3 + (ghR_3 + gR_2 + R_1),$$

et il est facile de voir que le degré du polynome entre parenthèses est moindre que celui du produit ghk. L'identité précédente exprime donc qu'en divisant f par ghk, on trouve Q_3 pour quotient et pour reste $ghR_3+gR_2+R_1$.

Si les divisions successives se font exactement, f est divisible par ghk, et le quotient de f par ghk est le dernier quotient obtenu. Inversement, si $f\equiv ghkQ$, f est divisible par g, et le quotient est hkQ; ce quotient sera à son tour divisible par h, et le quotient de cette nouvelle division sera kQ; ce nouveau quotient sera divisible par k, et le quotient de cette troisième division sera Q.

D'après cela, si on demandait de vérifier qu'un polynome $f(x)$ est divisible par $(x-a)^p$ (p étant entier et positif), voici comment on s'y prendrait. Soit, par exemple, $p=3$. On vérifierait d'abord que $f(x)$ est divisible par $x-a$, ensuite que le quotient de la division est lui-même divisible par $x-a$, enfin que le nouveau quotient est à son tour divisible par $x-a$; le quotient de cette dernière division serait le quotient de $f(x)$ par $(x-a)^3$.

Nous donnerons bientôt le moyen de reconnaitre, sans faire la division, si un polynome $f(x)$ est divisible par $x-a$, et de calculer, toujours sans faire l'opération, le quotient de cette division.

36. Problème. — *Soit $f(x)$, $g(x)$ deux polynomes dans lesquels un ou plusieurs des coefficients sont représentés par des lettres. Quelles relations doit-il y avoir entre ces coefficients pour que f soit divisible par g?*

Pour résoudre cette question, nous calculerons le reste de la division de f par g, et nous exprimerons que ce reste est identiquement nul : nous aurons donc les relations cherchées en égalant à 0 les coefficients des divers termes du reste. Si $f(x)$ est de degré n, $g(x)$ de degré $p\leqslant n$, le reste de la division de f par g sera un polynome de la forme

$$\lambda x^{p-1}+\mu x^{p-2}+\cdots;$$

en écrivant qu'il est identiquement nul, on obtient au plus p relations.

Proposons-nous, par exemple, de calculer p et q de façon que x^4+1 soit divisible par x^2+px+q. En divisant le premier polynome par le second, on trouve pour reste

$$[pq - p(p^2 - q)]x + [1 - q(p^2 - q)].$$

Il faut donc calculer p et q de manière qu'on ait simultanément

$$(1)\quad p(2q - p^2) = 0 \qquad \text{et} \qquad (2)\quad 1 - q(p^2 - q) = 0.$$

On satisfait à l'égalité (1) en prenant $p = 0$ ou $2q - p^2 = 0$ et pas autrement. Or, si dans l'égalité (2) on fait $p = 0$, il vient $1 + q^2 = 0$, ce qui est impossible; il faut donc prendre $2q = p^2$. Si dans l'égalité (2) on remplace p^2 par $2q$, elle donne $q^2 = 1$, d'où $q = \pm 1$; la valeur -1 est inacceptable, car elle donnerait $p^2 = -2$, ce qui est impossible; on a donc en définitive $q = +1$, $p^2 = 2$, d'où $p = \pm\sqrt{2}$. Ainsi il y a deux polynomes de la forme $x^2 + px + q$ qui divisent exactement $x^4 + 1$: ce sont $x^2 + \sqrt{2}\,x + 1$ et $x^2 - \sqrt{2}\,x + 1$. On a l'identité

$$x^4 + 1 \equiv (x^2 + \sqrt{2}\,x + 1)(x^2 - \sqrt{2}\,x + 1).$$

Division par $x - a$.

37. Théorème. — *Le reste de la division d'un polynome par $x - a$ est le nombre obtenu en remplaçant x par a dans le polynome.*

Soit $f(x)$ le polynome proposé. Divisons-le par $x - a$, et soit R le reste. Le degré de R est inférieur à celui de $x - a$, c'est-à-dire à 1 : R est donc une *constante*. Démontrons que c'est le nombre obtenu en remplaçant x par a dans $f(x)$. A cet effet, désignons par $Q(x)$ le quotient de $f(x)$ par $x - a$; nous avons l'identité

$$f(x) \equiv (x - a)Q(x) + R.$$

Les deux polynomes $f(x)$, $(x-a)Q(x)+R$, étant identiques, prennent la même valeur, quelque valeur que l'on donne à x. Si, en particulier, on donne à x la valeur a, le second polynome prend la valeur $0 \times Q(a)+R$ ou R. Donc $R = f(a)$.

Il suit de là que, *pour qu'un polynome $f(x)$ soit divisible par $x-a$, il faut et il suffit qu'il s'annule pour $x = a$.*

Remarque. — Si on prenait pour diviseur, non pas $x-a$, mais $ax+b$ $(a \neq 0)$, on verrait de la même façon que $R = f\left(-\frac{b}{a}\right)$.

Proposons-nous maintenant de calculer le quotient de la division de $f(x)$ par $x-a$. Supposons que $f(x)$ soit le polynome du troisième degré $a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$. Divisons-le par $x-a$. Le premier terme du quotient est a_0x^2 et le premier dividende partiel est $a'_1x^2+a_2x+a_3$, en posant $a'_1 = a_0a+a_1$. Le deuxième terme du quotient est a'_1x et le second dividende partiel est a'_2x+a_3, en posant $a'_2 = a'_1a+a_2$. Enfin, le dernier terme du quotient est a'_2 et le reste $R = a'_2a+a_3$.

On peut donc énoncer les règles suivantes, à l'aide desquelles on calcule, dans la pratique, le quotient et le reste de la division d'un polynome par $x-a$:

1° *Le coefficient du terme de plus haut degré du quotient est égal au coefficient du terme de plus haut degré du dividende.*

2° *En multipliant le coefficient de x^p au quotient par a, et en ajoutant au produit le coefficient de x^p au dividende, on obtient le coefficient de x^{p-1} au quotient.* Cette règle permet de calculer de proche en proche les différents coefficients du quotient.

3° *En multipliant le terme constant du quotient par a, et en ajoutant au produit le terme constant du dividende, on obtient le reste.*

Remarque. — Considérons les égalités

$$
\begin{aligned}
a'_1 &= a_0a+a_1,\\
a'_2 &= a'_1a+a_2,\\
R &= a'_2a+a_3.
\end{aligned}
$$

Si on multiplie les deux membres de la première par a^2, les

deux membres de la seconde par a, les deux membres de la troisième par 1, et qu'on ajoute ensuite membre à membre, on obtient

$$R = a_0 a^3 + a_1 a^2 + a_2 a + a_3.$$

On retrouve ainsi ce théorème : Le reste de la division d'un polynome par $x-a$ est le nombre obtenu en remplaçant x par a dans le polynome. Ajoutons que, si l'on veut calculer la valeur numérique que prend un polynome $f(x)$ pour $x = a$, ce qu'il y a de plus simple à faire, dans la plupart des cas, c'est de calculer, au moyen des trois règles précédentes, le quotient et le reste de la division de $f(x)$ par $x - a$: le reste est le nombre cherché.

Exemples. — 1° Prenons pour $f(x)$ le polynome

$$x^4 + 3x^2 - 8x - 7,$$

et proposons-nous de calculer $f(3)$.

Le quotient de $f(x)$ par $x - 3$ est du troisième degré. Le coefficient de x^3 au quotient est 1. Multiplions 1 par 3, et au produit 3 ajoutons le coefficient de x^3 au dividende ; ce coefficient étant nul, 3 est le coefficient de x^2 au quotient. Multiplions 3 par 3, et au produit 9 ajoutons le coefficient 3 de x^2 au dividende ; le résultat obtenu, 12, est le coefficient de x au quotient. Multiplions 12 par 3, et au produit 36 ajoutons le coefficient -8 de x au dividende ; le résultat obtenu, 28, est le terme constant du quotient. Enfin, multiplions 28 par 3, et au produit 84 ajoutons le terme constant -7 du dividende ; on obtient ainsi le reste 77 : $f(3) = 77$.

2° Prenons pour $f(x)$ le polynome

$$5x^4 - 7x^3 + 6x - 1,$$

et calculons $f(-2)$.

Le quotient de $f(x)$ par $x + 2$ est du troisième degré. Le coefficient de x^3 au quotient est 5. Multiplions 5 par -2, et au produit -10 ajoutons le coefficient -7 de x^3 au dividende ; nous obtiendrons ainsi -17, coefficient de x^2 au quotient. Multiplions -17 par -2, et au produit 34 ajoutons le coefficient de x^2 au dividende ; ce coefficient étant nul, 34 est le

coefficient de x au quotient. Multiplions 34 par — 2, et au produit — 68 ajoutons le coefficient 6 de x au dividende; le résultat obtenu, — 62, est le terme constant du quotient. Enfin multiplions — 62 par — 2, et au produit 124 ajoutons le terme constant — 1 du dividende ; on obtient ainsi le reste 123 : $f(-2) = 123$.

38. Divisions de $x^m \pm a^m$ par $x \pm a$.

1° $x^m - a^m$ est toujours divisible par $x - a$, car le dividende s'annule pour $x = a$. Formons le quotient par la règle précédente ; on a l'identité

$$(1) \quad x^m - a^m \equiv (x-a)(x^{m-1} + ax^{m-2} + \cdots + a^{m-2}x + a^{m-1}).$$

On voit que le quotient est un polynome homogène et de degré m par rapport aux deux variables x et a.

2° $x^m + a^m$ $(a \neq 0)$ n'est jamais divisible par $x - a$. Le reste de la division est $2a^m$, et l'on a l'identité

$$(2) \quad x^m + a^m \equiv (x-a)(x^{m-1} + ax^{m-2} + \cdots + a^{m-2}x + a^{m-1}) + 2a^m,$$

que l'on obtient d'ailleurs en ajoutant $2a^m$ aux deux membres de l'identité (1).

3° Le reste de la division de $x^m - a^m$ par $x + a$ est $(-a)^m - a^m$. Il est nul si m est pair, égal à $-2a^m$ si m est impair. On a donc, si m est pair :

$$(3) \quad x^m - a^m \equiv (x+a)(x^{m-1} - ax^{m-2} + a^2x^{m-3} - \cdots + a^{m-2}x - a^{m-1}),$$

et si m est impair :

$$(4) \quad x^m - a^m \equiv (x+a)(x^{m-1} - ax^{m-2} + \cdots - a^{m-2}x + a^{m-1}) - 2a^m.$$

4° Le reste de la division de $x^m + a^m$ par $x + a$ est $(-a)^m + a^m$. Il est nul si m est impair, égal à $2a^m$ si m est pair. On a donc, si m est impair :

$$(5) \quad x^m + a^m \equiv (x+a)(x^{m-1} - ax^{m-2} + \cdots - a^{m-2}x + a^{m-1}),$$

et si m est pair :

$$(6) \quad x^m + a^m \equiv (x+a)(x^{m-1} - ax^{m-2} + \cdots + a^{m-2}x - a^{m-1}) + 2a^m.$$

On peut d'ailleurs déduire les identités (5) et (6) respectivement des identités (4) et (3) en ajoutant $2a^m$ aux deux membres.

39. Théorème. — *Si un polynome* $f(x)$ *est divisible séparément par* $(x-a)^\alpha$, $(x-b)^\beta$, $(x-c)^\gamma$, ..., $a, b, c, \ldots$ *étant différents, il est divisible par le produit*

$$(x-a)^\alpha(x-b)^\beta(x-c)^\gamma\ldots.$$

En effet, on a l'identité

$$f(x) \equiv (x-a)^\alpha\varphi(x),$$

$\varphi(x)$ étant un polynome. Remplaçons-y x par b; nous obtenons, puisque $f(b)$ est nul, l'égalité

$$(b-a)^\alpha\varphi(b) = 0;$$

comme $b-a$ n'est pas nul, on a $\varphi(b) = 0$. Donc $\varphi(x)$ est divisible par $x-b$. Soit β' l'exposant de la plus haute puissance de $x-b$ qui divise $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) \equiv (x-b)^{\beta'}\psi(x), \qquad \text{avec} \qquad \psi(b) \neq 0;$$

nous aurons

$$f(x) \equiv (x-a)^\alpha[(x-b)^{\beta'}\psi(x)],$$

ou

$$f(x) \equiv (x-b)^{\beta'}[(x-a)^\alpha\psi(x)],$$

identité qui montre que $f(x)$ est divisible par $(x-b)^{\beta'}$ et non par une puissance supérieure de $x-b$. Donc β' est au moins égal à β, et $f(x)$ est divisible par $(x-a)^\alpha(x-b)^\beta$:

$$f(x) \equiv (x-a)^\alpha(x-b)^\beta\chi(x),$$

$\chi(x)$ étant le polynome $(x-b)^{\beta'-\beta}\psi(x)$. On verra de la même façon, en remplaçant x par c, que $\chi(x)$ admet le facteur $x-c$ à une puissance d'exposant au moins égal à γ :

$$\chi(x) \equiv (x-c)^\gamma Q(x),$$

$Q(x)$ étant un polynome, et on en conclut que

$$f(x) \equiv (x-a)^\alpha(x-b)^\beta(x-c)^\gamma Q(x).$$

Et ainsi de suite.

Il suit de là que si un polynome $f(x)$ de degré n s'annule séparément pour $x=a$, $x=b$, $x=c$, ..., $a, b, c, \ldots$ étant des nombres tous différents, il est divisible par le produit

$$(x-a)(x-b)(x-c)\ldots.$$

S'il y a r nombres $a, b, c, \ldots$, on aura l'identité

$$f(x) \equiv (x-a)(x-b)(x-c)\ldots f_r(x),$$

$f_r(x)$ étant un polynome de degré $n - r$ dans lequel le coefficient de x^{n-r} est égal au coefficient de x^n dans $f(x)$.

40. Théorème. — *Il est impossible qu'un polynome $f(x)$ de degré n s'annule pour plus de n valeurs de la variable.*

Car s'il s'annulait pour n' valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_{n'}$ de x, $n' > n$, il serait divisible par le produit $(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{n'})$, ce qui est absurde, puisque ce produit est de degré n', et qu'il est impossible qu'une division dans laquelle le degré du diviseur surpasse le degré du dividende se fasse exactement.

41. Théorème. — *Si le polynome $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ s'annule pour plus de n valeurs de x, il est identiquement nul.*

En effet, si les coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n$ n'étaient pas tous nuls, le degré i du polynome serait inférieur ou égal à n. Le polynome ne pourrait pas s'annuler pour plus de i valeurs différentes de x; à plus forte raison, il serait impossible qu'il s'annulât pour plus de n valeurs de x.

En particulier, *si un polynome s'annule pour toute valeur de x, il est identiquement nul.* Il suffit même, pour que l'on puisse affirmer qu'un polynome $f(x)$ est identiquement nul, que ce polynome s'annule pour toutes les valeurs d'un ensemble de nombres, *pourvu que cet ensemble contienne une infinité de nombres.* L'ensemble des nombres entiers, l'ensemble de tous les nombres (ou simplement des nombres rationnels) compris entre a et b satisfont à cette condition. Ainsi un polynome $f(x)$ qui s'annule pour toute valeur de x comprise entre a et b $(a \neq b)$ est identiquement nul.

42. Théorème. — *Si deux polynomes $f(x)$, $g(x)$, l'un et l'autre de degré au plus égal à n, deviennent égaux pour plus de n valeurs différentes de x, ils sont identiques.*

Car, autrement, la différence $f(x) - g(x)$ serait un polynome non nul identiquement, de degré au plus égal à n, et qui s'annulerait pour plus de n valeurs de x.

En particulier, *deux polynomes $f(x)$, $g(x)$ sont identiques s'ils*

deviennent égaux pour toute valeur de x, ou simplement pour toutes les valeurs de x appartenant à un ensemble qui contient une infinité de nombres (par exemple, pour toutes les valeurs de x comprises entre a et b).

43. *Exercice.* — Soit $f(x)$, $g(x)$ deux polynomes, chacun de degré au plus égal à n. Considérons l'expression $\frac{f(x)}{g(x)}$, à laquelle on donne le nom de *fraction rationnelle*, et supposons qu'elle prenne la même valeur k pour plus de n valeurs de x : le polynome $f(x)$ sera identique à $kg(x)$.

En effet, les deux polynomes $f(x)$ et $kg(x)$, de degrés au plus égaux à n, deviennent égaux pour plus de n valeurs de x. Donc $f(x) \equiv kg(x)$; la fraction $\frac{f(x)}{g(x)}$ ou $\frac{kg(x)}{g(x)}$ prend la valeur k pour toute valeur de x n'annulant pas $g(x)$. (Pour une valeur de x annulant $g(x)$, la fraction n'aurait aucun sens).

Si, par exemple, l'expression $\frac{ax+b}{a'x+b'}$ prend la même valeur k pour deux valeurs de x, $ax+b$ est identique à $k(a'x+b')$; on a $a = ka'$, $b = kb'$, d'où $ab' = ka'b'$, $a'b = kb'a'$: donc $ab' = a'b$. D'après cela, si $ab' \neq a'b$, on est certain qu'à deux valeurs différentes de x correspondent deux valeurs différentes de la fraction. Si au contraire $ab' = a'b$, la fraction $\frac{ax+b}{a'x+b'}$ a une valeur indépendante de x.

EXTENSION DU THÉORÈME PRÉCÉDENT AU CAS DE PLUSIEURS VARIABLES

44. Nous nous bornerons au cas de deux variables x, y. Voici l'énoncé du théorème que nous allons démontrer.

Soit $f(x, y)$, $g(x, y)$ deux polynomes dans lesquels x n'entre pas à un degré plus élevé que m ni y à un degré plus élevé que p. Soit $x_1, x_2, \ldots, x_{m'}$ $(m' > m)$ une première suite de m' nombres différents, et soit $y_1, y_2, \ldots, y_{p'}$ $(p' > p)$ une

seconde suite de p' nombres différents entre eux. Si l'on a les $m'p'$ égalités obtenues en donnant, dans

$$f(x_i, y_k) = g(x_i, y_k),$$

à l'indice i l'une des valeurs $1, 2, \ldots, m'$ et à l'indice k l'une des valeurs $1, 2, \ldots, p'$, on est sûr que ces deux polynomes sont identiques.

Ordonnons en effet les deux polynomes f et g suivant les puissances croissantes de y, et soit

$$f(x, y) \equiv a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \ldots,$$
$$g(x, y) \equiv b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + \ldots,$$

$a_0, a_1, a_2, \ldots$; $b_0, b_1, b_2, \ldots$ étant des polynomes en x dont les degrés ne dépassent pas m. Substituons x_1 à x : nous aurons deux polynomes en y, de degrés p au plus, qui deviennent égaux pour plus de p valeurs de y : ils sont donc identiques. Ainsi, pour $x = x_1$, les polynomes $a_0, a_1, a_2, \ldots$ prennent respectivement les mêmes valeurs que les polynomes $b_0, b_1, b_2, \ldots$. La même chose a lieu pour $x = x_2, x_3, \ldots, x_{m'}$. Chacun des couples $(a_0, b_0), (a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots$ est donc formé de deux polynomes en x de degrés m au plus et qui deviennent égaux pour plus de m valeurs de x : les deux polynomes de chaque couple sont donc identiques. Dès lors, les deux polynomes proposés sont identiques.

En particulier, *deux polynomes $f(x, y)$, $g(x, y)$, égaux pour tout système de valeurs de x et de y, sont identiques.* Ainsi on peut dire à volonté : deux polynomes sont identiques quand les polynomes réduits sont formés avec les mêmes termes, ou bien : deux polynomes sont identiques quand ils prennent la même valeur numérique, quelles que soient les valeurs numériques attribuées aux variables qui y figurent.

Exercice. — Considérons l'expression $\dfrac{f(x, y)}{g(x, y)}$, dans laquelle f et g sont deux polynomes qui ne contiennent pas x à un degré plus élevé que m ni y à un degré plus élevé que p. Si elle prend la même valeur numérique λ pour les $m'p'$ systèmes de valeurs (x_i, y_k) $(i = 1, 2, \ldots, m'$; $k = 1, 2, \ldots, p'$; $m' > m$,

$p' > p$), on peut affirmer que $f(x, y)$ est identique à $\lambda\, g(x, y)$, et alors, pour tout système de valeurs n'annulant pas $g(x, y)$, l'expression $\frac{f(x, y)}{g(x, y)}$ ou $\frac{\lambda g(x, y)}{g(x, y)}$ prend la valeur numérique λ.

Plus grand commun diviseur de plusieurs polynomes [1].

45. Ainsi que nous l'avons déjà dit, un polynome $g(x)$ est diviseur de $f(x)$, ou divise $f(x)$, lorsqu'il existe un polynome $Q(x)$ tel qu'on ait $f(x) \equiv g(x) Q(x)$. Remarquons que, si $g(x)$ est un diviseur de $f(x)$, $kg(x)$ sera aussi un diviseur de $f(x)$, k étant une constante quelconque différente de 0. Car l'identité $f \equiv gQ$ peut s'écrire $f \equiv kg \times \frac{1}{k} Q$. Dans tout ce qui va suivre, deux diviseurs tels que $g(x)$, $kg(x)$, qui ne diffèrent que par un facteur constant, ne seront pas considérés comme distincts.

Remarquons encore que, si $g(x)$ est un diviseur de $f(x)$, $g(x)$ sera un diviseur de tout multiple de $f(x)$. En effet, A étant un polynome quelconque, l'identité $f \equiv gQ$ entraîne l'identité $Af \equiv g \times AQ$.

Remarquons enfin que, si $g(x)$ divise plusieurs polynomes $f(x)$, $f_1(x)$, ..., il divise leur somme. Car les identités $f \equiv gQ$, $f_1 \equiv gQ_1$,... entraînent l'identité $f + f_1 + \ldots \equiv g(Q + Q_1 + \ldots)$. Il suit de là que, si un polynome divise la somme de n polynomes et $n - 1$ de ces polynomes, il divise le $n^{\text{ième}}$.

On peut faire sur les polynomes une théorie analogue à la théorie arithmétique du plus grand commun diviseur de plusieurs nombres entiers.

Deux ou plusieurs nombres entiers ont toujours au moins un diviseur commun, qui est 1. Le nombre des diviseurs communs à plusieurs nombres entiers est limité, puisque aucun de ces diviseurs ne peut dépasser le plus petit des nombres donnés, et, par cela même, il y en a un plus grand que tous les autres, appelé plus grand commun diviseur, que l'on calcule sans peine par une suite de divisions.

De même, des polynomes quelconques ont toujours au moins un diviseur commun, qui est une constante au hasard, non nulle. Il est évident *a priori* que le degré de chacun de ces diviseurs ne peut

---

(1) Nous ne nous appuierons, dans ce qui va suivre, sur aucun des théorèmes démontrés dans les nos 37 et suivants.

dépasser le degré de celui ou ceux des polynomes donnés dont le degré est le plus petit ; mais, parmi ces diviseurs, n'y en a-t-il pas plusieurs, distincts, de même degré et du plus haut degré possible?

Le théorème suivant va nous permettre de répondre à cette question :

Théorème. — *Étant donné plusieurs polynomes, il existe un polynome* $r(x)$ (pouvant se réduire à une constante différente de 0) *tel que les diviseurs communs à ces divers polynomes soient les mêmes que les diviseurs de* $r(x)$.

Admettons provisoirement ce théorème. Il en résulte que le polynome $r(x)$, qui se divise lui-même, est diviseur commun aux polynomes proposés. Ceux-ci n'ont d'ailleurs aucun diviseur commun de degré supérieur au degré de $r(x)$. Supposons qu'ils en aient un, $s(x)$, de même degré que $r(x)$; $s(x)$ sera un diviseur de $r(x)$, et le quotient sera une constante k : $r(x) \equiv ks(x)$. Les deux diviseurs $r(x)$, $s(x)$ ne sont donc pas distincts. Ainsi $r(x)$ est le seul polynome du plus haut degré possible qui divise à la fois les polynomes proposés. On l'appelle *le plus grand commun diviseur de ces polynomes*, et l'on voit que *les diviseurs communs à plusieurs polynomes sont les mêmes que les diviseurs de leur plus grand commun diviseur.*

46. La démonstration que nous allons faire pour établir l'existence du polynome r nous donnera en même temps un moyen de le calculer.

Supposons d'abord qu'on n'ait que deux polynomes f, g. Si f est divisible par g, tout diviseur de g étant un diviseur de f, les diviseurs communs à f et à g sont les mêmes que les diviseurs de g. Supposons qu'aucun des polynomes f, g ne soit divisible par l'autre, et pour fixer les idées, que le degré de f soit supérieur ou égal à celui de g. Je dis que les diviseurs communs à f et g sont les mêmes que les diviseurs communs à g et au reste h de la division de f par g.

Car soit $Q(x)$ le quotient de cette division. On a

$$f \equiv gQ + h.$$

Tout polynome qui divise à la fois f et g divise aussi gQ. Divisant une somme f de deux polynomes et une des parties gQ de la somme, il divise l'autre h. Tout polynome qui divise g et h divise gQ ; divisant les deux parties, gQ et h, d'une somme, il divise cette somme f. Ainsi les diviseurs communs à f et g sont des diviseurs communs à g et h; les diviseurs communs à g et h sont

des diviseurs communs à f et g. Les diviseurs communs à f et g sont les mêmes que les diviseurs communs à g et h.

Si h divise g, les diviseurs communs à g et h, et par suite les diviseurs communs à f et g, sont les mêmes que les diviseurs de h. Si h ne divise pas g, soit k le reste de la division de g par h. Les diviseurs communs à g et h sont les mêmes que les diviseurs communs à h et k; si k divise h, ils sont les mêmes que les diviseurs de k ; sinon, soit l le reste de la division de h par k. Les diviseurs communs à h et k sont les mêmes que les diviseurs communs à k et l ; si l divise k, ce sont les mêmes que les diviseurs de l ; si l ne divise pas k, on continuera de la même façon. Les degrés des restes successifs $h, k, l, \ldots$ allant en diminuant à chaque fois, après un nombre limité d'opérations, on arrivera nécessairement à un reste identiquement nul. Soit r le reste qui le précède immédiatement, qui peut d'ailleurs se réduire à une constante différente de zéro ; les diviseurs communs à f et g, qui sont les mêmes que les diviseurs communs à g et h; qui sont les mêmes que les diviseurs communs à h et k, ..., qui sont les mêmes que les diviseurs communs à q et r, sont les mêmes que les diviseurs de r.

Supposons maintenant qu'on ait plusieurs polynomes $f, g\ h, k$. Il existe un polynome r tel que les diviseurs communs à f et g soient les mêmes que les diviseurs de r ; un polynome s tel que les diviseurs communs à r et h soient les mêmes que les diviseurs de s ; enfin un polynome t tel que les diviseurs communs à s et k soient les mêmes que les diviseurs de t. Les diviseurs communs à f, g, h, k sont les mêmes que les diviseurs de t.

47. La proposition est ainsi démontrée, et nous pouvons énoncer la règle suivante :

Règle. — ***Pour calculer le plus grand commun diviseur de deux polynomes, on les ordonne par rapport aux puissances décroissantes de x ; on divise celui qui est du degré le plus élevé par l'autre ; si la division se fait exactement, le polynome de degré le moins élevé est le plus grand commun diviseur ; sinon, on divise le polynome employé comme diviseur par le reste de la division, puis le polynome employé comme diviseur dans cette nouvelle division par le reste qu'elle fournit, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'une division se fasse exactement ; le dernier diviseur est le plus grand commun diviseur cherché.***

Voici une remarque qui permet quelquefois de simplifier les calculs dans la recherche du plus grand commun diviseur de deux polynomes.

Soit f, g deux polynomes de degrés n, p $(n \geqslant p)$. Ordonnons-les par rapport aux puissances décroissantes de x, et divisons le

premier par le second. Appelons ax^{n-p}, $a_1x^{n_1-p}$, $a_2x^{n_2-p}$, ... les termes successifs du quotient, $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, ... les dividendes partiels successifs. On a les identités

$$\begin{aligned} f &\equiv g \,.\, ax^{n-p} + f_1, \\ f_1 &\equiv g \,.\, a_1x^{n_1-p} + f_2, \\ f_2 &\equiv g \,.\, a_2x^{n_2-p} + f_3, \\ & \dots\dots\dots \end{aligned}$$

Recommençons maintenant les mêmes opérations, en ayant soin de multiplier d'abord $f(x)$ par une constante k différente de zéro, puis le dividende partiel ainsi obtenu par une nouvelle constante k_1 différente de zéro, puis le nouveau dividende partiel ainsi obtenu par une constante k_2 différente de zéro, etc. En vertu des identités

$$\begin{aligned} kf &\equiv g \,.\, kax^{n-p} + kf_1, \\ kk_1f_1 &\equiv g \,.\, kk_1a_1x^{n_1-p} + kk_1f_2, \\ kk_1k_2f_2 &\equiv g \,.\, kk_1k_2a_2x^{n_2-p} + kk_1k_2f_3, \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{aligned}$$

les termes successifs obtenus à la place des termes du quotient sont

$$kax^{n-p}, \qquad kk_1a_1x^{n_1-p}, \qquad kk_1k_2a_2x^{n_2-p}, \dots,$$

et les dividendes partiels successifs sont

$$kf_1, \qquad kk_1f_2, \qquad kk_1k_2f_3, \dots.$$

Ainsi le quotient est altéré, et le reste nouveau est identique à l'ancien multiplié par le produit des constantes k, k_1, ... Finalement, le dernier reste sera multiplié par le produit des constantes employées dans toutes les divisions successives et sera par conséquent le plus grand commun diviseur.

On pourra donc, en utilisant cette remarque, ne pas introduire de coefficients fractionnaires. Si tous les coefficients d'un dividende partiel contiennent un même facteur, on pourra le supprimer quelquefois sans introduire de coefficients fractionnaires. Il va sans dire aussi que, si les coefficients d'un diviseur renferment un même facteur, on peut le supprimer.

Exemple : Chercher le plus grand commun diviseur entre $x^3 + px + q$ et $3x^2 + p$.

On divise $3x^3 + 3px + 3q$ par $3x^2 + p$; on obtient pour quotient x et pour reste $2px + 3q$. Supposons d'abord $p = 0$; alors, si $q \neq 0$, les deux polynomes ont pour plus grand commun diviseur une constante ; si $q = 0$, leur plus grand commun diviseur est x^2.

Supposons maintenant $p \neq 0$. Divisons par $2px + 3q$ le polynome $3x^2 + p$, ou plutôt $6px^2 + 2p^2$; le premier terme du quotient est $3x$ et le premier dividende partiel est $-9qx + 2p^2$. Ce dividende partiel, multiplions-le par $2p$, et divisons le produit

$-18pqx+4p^3$ par $2px+3q$; le quotient est $-9q$ et le reste $4p^3+27q^2$. Si $4p^3+27q^2 \neq 0$, les deux polynomes ont pour plus grand commun diviseur une constante ; si $4p^3+27q^2=0$, leur plus grand commun diviseur est $2px+3q$.

48. Théorème. — *Quand on multiplie plusieurs polynomes par un même polynome, leur plus grand commun diviseur est multiplié par ce facteur.*

On entend par là que le plus grand commun diviseur des nouveaux polynomes est identique au plus grand commun diviseur des anciens polynomes, multiplié par le facteur par lequel on les a multipliés eux-mêmes. Ce théorème résulte du procédé exposé pour calculer le plus grand commun diviseur de plusieurs polynomes. Supposons d'abord qu'on en ait deux, f et g ; soit h le reste de la division de f par g, k le reste de la division de g par h, ..., r le dernier reste avant 0, c'est-à-dire le plus grand commun diviseur. Multiplions f et g par $\lambda(x)$. Le reste de la division de $f\lambda$ par $g\lambda$ est $h\lambda$; le reste de la division de $g\lambda$ par $h\lambda$ est $k\lambda$, etc. Tous les restes sont multipliés par λ ; le plus grand commun diviseur, qui est le dernier de ces restes, est également multiplié par λ.

Soit maintenant quatre polynomes f, g, h, k ; appelons r le plus grand commun diviseur de f et g, s le plus grand commun diviseur de r et h, t le plus grand commun diviseur de s et k ; t est, comme on sait, le plus grand commun diviseur de f, g, h, k. Multiplions ces quatre polynomes par λ. Le plus grand commun diviseur de $f\lambda$ et $g\lambda$ est $r\lambda$; le plus grand commun diviseur de $r\lambda$ et $h\lambda$ est $s\lambda$; le plus grand commun diviseur de $s\lambda$ et $k\lambda$ est $t\lambda$: tel est le plus grand commun diviseur de $f\lambda$, $g\lambda$, $h\lambda$, $k\lambda$.

Cette proposition entraîne la suivante :

Quand plusieurs polynomes sont divisibles par un même polynome $\lambda(x)$, il en est de même de leur plus grand commun diviseur ; si on effectue les divisions, ce plus grand commun diviseur est lui-même divisé par le polynome $\lambda(x)$.

En particulier, *si on divise plusieurs polynomes par leur plus grand commun diviseur, les quotients ont pour plus grand commun diviseur une constante.* Réciproquement, *si les quotients de plusieurs polynomes par un diviseur commun ont pour plus grand commun diviseur une constante, ce diviseur est le plus grand commun diviseur des polynomes proposés.*

49. Lorsque *deux* polynomes $f(x)$, $g(x)$ ont pour plus grand commun diviseur une constante, on dit qu'ils sont *premiers entre eux*, que *f est premier avec g* ou que *g est premier avec f.*

On démontre comme en arithmétique la proposition suivante :

On ne change pas le plus grand commun diviseur de deux polynomes en multipliant l'un d'eux par un polynome premier avec l'autre.

On en tire les conclusions suivantes : *Si un polynome divise un produit de deux facteurs et est premier avec l'un d'eux, il divise l'autre ; si un polynome est premier avec les facteurs d'un produit, il est premier avec ce produit ; si deux produits sont tels que chaque facteur de l'un soit premier avec chaque facteur de l'autre, les deux produits sont premiers entre eux.* En particulier, si deux polynomes sont premiers entre eux, toute puissance de l'un sera première avec toute puissance de l'autre. Ainsi, a et b étant deux nombres différents, $x - a$ est premier avec $x - b$; par suite, quels que soient les entiers positifs α, β, $(x - a)^{\alpha}$ est premier avec $(x - b)^{\beta}$.

Enfin on démontre comme en arithmétique que, *si un polynome est divisible par plusieurs autres premiers entre eux deux à deux, il est divisible par leur produit.* D'après cela, si un polynome est divisible séparément par $(x - a)^{\alpha}$, $(x - b)^{\beta}$, $(x - c)^{\gamma}$, a, b, c étant des nombres différents, il est divisible par le produit $(x - a)^{\alpha}(x - b)^{\beta}(x - c)^{\gamma}$. On retrouve ainsi un théorème déjà démontré.

Plus petit commun multiple de plusieurs polynomes.

50. Plusieurs polynomes ont évidemment une infinité de multiples communs. On démontre, comme en arithmétique, la proposition suivante :

Étant donné plusieurs polynomes, il existe un polynome $\mu(x)$ tel que les multiples communs à ces divers polynomes soient les mêmes que les multiples de $\mu(x)$. Ce polynome $\mu(x)$ est le seul polynome du plus bas degré possible qui soit multiple commun des polynomes proposés. On l'appelle *le plus petit commun multiple de ces polynomes*, et l'on voit que *les multiples communs à plusieurs polynomes sont les mêmes que les multiples de leur plus petit commun multiple.*

Le plus petit commun multiple de deux polynomes est identique au quotient que l'on obtient en divisant le produit de ces polynomes par leur plus grand commun diviseur.

51. Démonstration d'un théorème relatif aux restes obtenus dans la recherche du plus grand commun diviseur de deux polynomes. — Soit f et g les deux polynomes, n et p leurs degrés respectifs, et suppo-

sons $n \geqslant p$. Soit $R_1, R_2, \dots$ les restes successifs obtenus en calculant le plus grand commun diviseur R de f et g ; supposons qu'il faille $k+1$ divisions pour trouver R. On a les identités

$$\begin{aligned} f &\equiv gQ_1 + R_1, \\ g &\equiv R_1Q_2 + R_2, \\ R_1 &\equiv R_2Q_3 + R_3, \\ &\dots\dots\dots \\ R_{i-2} &\equiv R_{i-1}Q_i + R_i, \\ &\dots\dots\dots \\ R_{k-2} &\equiv R_{k-1}Q_k + R, \end{aligned}$$

d'où l'on conclut

$$\begin{aligned} R_1 &\equiv f - gQ_1, \\ R_2 &\equiv -fQ_2 + g(1 + Q_1Q_2), \\ R_3 &\equiv f(1 + Q_2Q_3) + g(-Q_1 - Q_3 - Q_1Q_2Q_3), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Ainsi, R_i étant le $i^{\text{ième}}$ reste, il existe deux polynomes F_i, G_i tels que

$$R_i \equiv fG_i + gF_i\,;$$

de plus, les degrés de F_i et de G_i sont respectivement égaux à ceux des produits $Q_1Q_2 \dots Q_i$, $Q_2Q_3 \dots Q_i$. Cela est exact jusqu'au reste R_3. Pour prouver que la loi est générale, il suffit de montrer que, si elle est vraie jusqu'au reste R_{i-1}, elle l'est, par cela même, pour R_i. Admettons que l'on ait

$$\begin{aligned} R_{i-2} &\equiv fG_{i-2} + gF_{i-2}, \\ R_{i-1} &\equiv fG_{i-1} + gF_{i-1}, \end{aligned}$$

F_{i-2} et G_{i-2} étant des polynomes dont les degrés sont respectivement égaux à ceux de $Q_1Q_2 \dots Q_{i-2}$, $Q_2Q_3 \dots Q_{i-2}$; F_{i-1} et G_{i-1} des polynomes dont les degrés sont respectivement égaux à ceux de $Q_1Q_2 \dots Q_{i-1}$, $Q_2Q_3 \dots Q_{i-1}$. Calculons R_i. On a

$$R_i \equiv R_{i-2} - R_{i-1}Q_i,$$

et par suite

$$R_i \equiv fG_{i-2} + gF_{i-2} - (fG_{i-1} + gF_{i-1})Q_i,$$

ou encore

$$R_i \equiv fG_i + gF_i,$$

en posant

$$\begin{aligned} F_i &\equiv F_{i-2} - F_{i-1}Q_i, \\ G_i &\equiv G_{i-2} - G_{i-1}Q_i\,: \end{aligned}$$

F_i et G_i sont donc des polynomes dont les degrés sont bien respectivement égaux aux degrés de $Q_1Q_2 \dots Q_i$, $Q_2Q_3 \dots Q_i$.

Cela posé, appelons $r_1, r_2, \dots$ les degrés de $R_1, R_2, \dots$; ceux de $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$ seront respectivement

$$n - p, \quad p - r_1, \quad r_1 - r_2, \dots ;$$

le degré de F_i sera $(n-p)+(p-r_1)+(r_1-r_2)+\ldots+(r_{i-2}-r_{i-1})$, c'est-à-dire $n-r_{i-1}$, et celui de G_i sera $p-r_{i-1}$. Or r_{i-1} est supérieur à r_i : les polynomes F_i et G_i ont donc des degrés respectivement inférieurs à $n-r_i$, $p-r_i$.

En résumé, R_i étant le $i^{\text{ième}}$ reste, il existe deux polynomes F_i, G_i, dont les degrés sont respectivement inférieurs à $n-r_i$, $p-r_i$, et tels que l'on ait

$$R_i \equiv fG_i + gF_i.$$

Tel est le théorème que nous avions en vue.

En particulier, R étant le plus grand commun diviseur entre f et g, il existe deux polynomes F et G, dont les degrés sont respectivement inférieurs à $n-r$, $p-r$ (si r est le degré de R), tels que l'on ait

$$R \equiv fG + gF.$$

Dans le cas spécial où f et g sont premiers entre eux, R est une constante non nulle, et l'identité précédente devient

$$1 \equiv fg_1 + gf_1, \qquad f_1 \equiv \frac{1}{R}F, \qquad g_1 \equiv \frac{1}{R}G\,;$$

f_1 et g_1 sont deux polynomes dont les degrés sont respectivement inférieurs à n et à p. On peut donc énoncer le théorème suivant, dû à Bézout :

Si f et g sont deux polynomes premiers entre eux, de degrés n et p, il existe deux polynomes f_1 et g_1, de degrés respectivement inférieurs à n et à p, tels que l'on ait l'identité $fg_1 + gf_1 \equiv 1$.

Inversement, si quatre polynomes f, g, f_1, g_1 satisfont à l'identité précédente, on en conclut que chacun des couples de polynomes (f, g), (f, f_1), (g, g_1), (f_1, g_1) est formé de polynomes premiers entre eux. Car si f et g, par exemple, n'étaient pas premiers entre eux, ils auraient un plus grand commun diviseur, R, qui ne serait pas une constante ; R, divisant f et g, diviserait 1, ce qui est absurde.

Nous venons de voir que, si f et g sont premiers entre eux, il y a un couple de polynomes X, Y, à savoir $X \equiv f_1$, $Y \equiv g_1$, satisfaisant à l'identité

$$fY + gX \equiv 1. \tag{1}$$

En existe-t-il d'autres ?

Admettons qu'il y en ait un autre ; on aurait

$$fY + gX \equiv fg_1 + gf_1,$$
$$f(Y - g_1) \equiv g(f_1 - X).$$

f diviserait donc le produit $g(f_1 - X)$; étant premier avec g, il diviserait $f_1 - X$, et on aurait

$$f_1 - X \equiv f\lambda,$$

et par suite

$$Y - g_1 \equiv g\lambda,$$

λ étant un polynome. Ainsi, X et Y seraient donnés par les formules

$$(2) \qquad \begin{cases} X \equiv f_1 - f\lambda, \\ Y \equiv g_1 + g\lambda. \end{cases}$$

Inversement, tous les couples de polynomes X, Y définis par les formules (2), dans lesquelles on prend pour λ un polynome arbitraire, satisfont à l'identité (1).

En résumé, il y a une infinité de couples de polynomes satisfaisant à l'identité (1), et ils sont tous donnés par les formules (2), où λ désigne un polynome arbitraire. Si on prend $\lambda \equiv 0$, X se réduit à f_1, qui est de degré inférieur à n, et Y à g_1, qui est de degré inférieur à p. Lorsque λ n'est pas nul identiquement, le degré de X est $\geqslant n$, celui de Y est $\geqslant p$. Par suite, parmi les couples de polynomes (2), il y en a un et un seul où X est de degré inférieur à n et Y de degré inférieur à p : c'est le couple f_1, g_1.

Plus généralement, considérons l'identité

$$(3) \qquad fY + gX \equiv h,$$

les polynomes f et g étant premiers entre eux. Elle est vérifiée par le couple f_1h, g_1h. Tous les couples de polynomes qui la vérifient sont donnés par les formules

$$(4) \qquad \begin{cases} X \equiv f_1h - f\lambda, \\ Y \equiv g_1h + g\lambda. \end{cases}$$

Dans un et un seul de ces couples, X est de degré moindre que n : c'est celui qu'on obtient en prenant pour λ le quotient de f_1h par f. De même, il y a un couple et un seul dans lequel Y soit de degré moindre que p. Si le degré de h est moindre que $n + p$, ces deux couples n'en forment qu'un.

EXERCICES

1. Calculer le coefficient de x^p dans le développement de

$$(1 + x + 2x^2 + \dots + nx^n)^2.$$

2. Soit le polynome

$$f(x) \equiv (1 + ax)(1 + a^2x)\dots(1 + a^mx).$$

On demande de vérifier l'identité

$$(1 + ax)f(ax) \equiv (1 + a^{m+1}x)f(x),$$

et de s'en servir pour calculer les coefficients de $f(x)$.

3. Lorsqu'un polynome $f(x)$ vérifie l'identité $f(x) \equiv f(-x)$, il contient

uniquement des puissances paires de x ; lorsqu'un polynome $f(x)$ vérifie l'identité $f(x) \equiv -f(-x)$, il contient uniquement des puissances impaires de x.

Démontrer que si deux polynomes ne contiennent que des termes dont les degrés sont tous de même parité, le quotient et le reste de leur division ne contiennent, eux aussi, que des termes dont les degrés sont tous de même parité.

*4. Former un polynome en x, $\varphi_p(x)$, qui s'annule pour $x = 0$ et qui vérifie l'identité

$$\varphi_p(x) - \varphi_p(x-1) \equiv x^p,$$

p désignant un entier positif ou nul.

La valeur que prend le polynome $\varphi_p(x)$ pour une valeur entière positive n attribuée à x est égale à la somme des $p^{\text{ièmes}}$ puissances des n premiers nombres entiers.

Tous les polynomes $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... s'annulent pour $x = -1$.

p étant supérieur à 0, on a l'identité

$$\varphi_p(x) \equiv (-1)^{p+1}\varphi_p(-x-1).$$

Si l'on fait $x = y - \dfrac{1}{2}$, le polynome $\varphi_p(x)$ contient uniquement des puissances paires de y si p est impair, et des puissances impaires si p est pair.

Si p est pair et différent de 0, le polynome $\varphi_p(x)$ s'annule pour $x = -\dfrac{1}{2}$. Appell.

5. Calculer p et q de façon que $x^4 + px^2 + q$ soit divisible par $x^2 + px + q$. $q = 1$; $p = -2$ ou $p = 1$

6. Dans quels cas $x^3 + mabx + a^3 + b^3$ est-il divisible par $x + a + b$? Calculer le quotient. $m = -3$; quotient $x^2 - (a+b)x + (a^2 - ab + b^2)$

7. Quelle relation doit-il y avoir entre p et q pour qu'il existe un nombre α tel que $x^3 + px + q$ soit divisible par $(x-\alpha)^2$? $4p^3 + 27q^2 = 0$; $\alpha = \sqrt[3]{\ldots}$

8. Démontrer qu'un polynome entier en x peut toujours se mettre sous la forme $\varphi(x^2) + x\psi(x^2)$, $\varphi(x^2)$ et $\psi(x^2)$ désignant des polynomes en x^2, et que le reste de la division du polynome par $x^2 + 1$ est

$$\varphi(-1) + x\psi(-1).$$

9. Ordonner un polynome $f(x)$ suivant les puissances d'un polynome $g(x)$, les coefficients étant des polynomes dont les degrés soient inférieurs au degré de $g(x)$.

10. $nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$ est divisible par $(x-1)^2$; calculer le quotient.

11. $f(x)$ étant un polynome à coefficients entiers, si $f(2p)$ et $f(2q+1)$ (p et q étant des nombres entiers) sont tous deux impairs, il n'existe aucun nombre entier pour lequel $f(x)$ soit nul.

12. Calculer le reste de la division de $x^m - a^m$ par $x^p - a^p$; comment faut-il choisir m et p pour que la division se fasse exactement?

13. Connaissant les restes α et β des divisions de $f(x)$ par $x-a$ et $x-b$, trouver le reste de la division de $f(x)$ par $(x-a)(x-b)$.

14. Si l'on a

$$\alpha^3 + p\alpha + q = 0,$$
$$\beta^3 + p\beta + q = 0,$$
$$\gamma^3 + p\gamma + q = 0,$$

α, β, γ étant des nombres différents, on a

$$\alpha + \beta + \gamma = 0.$$

15. Former un polynome de degré non supérieur à 4 qui, pour $x = 1, 2, 3, 4$, prenne la même valeur que $\alpha x + \beta$, et qui, pour $x = 0$, prenne la valeur a.

16. Étant donné n nombres distincts

$$a_1, a_2, \ldots a_n;$$

puis n autres nombres

$$u_1, u_2, \ldots u_n;$$

il existe un polynome $f(x)$ et un seul de degré moindre que n, tel que

$$f(a_k) = u_k, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

L'expression trouvée pour $f(x)$ se nomme la *formule d'interpolation* de Lagrange.

17. $f(x)$ étant un polynome, s'il existe un nombre a différent de 0 tel qu'on ait l'identité $f(x+a) \equiv f(x)$, $f(x)$ est une constante.

18. Si un polynome en x et y, $f(x, y)$, *symétrique* par rapport à x et y, c'est-à-dire tel que $f(x, y) \equiv f(y, x)$, est divisible par $x - y$, quand on y regarde x comme seule variable, il est divisible par $(x-y)^2$.

* **19.** Chercher le plus grand commun diviseur et le plus petit commun multiple des polynomes $x^a - 1$, $x^b - 1$. Démontrer que, μ étant le plus petit commun multiple et d étant le plus grand commun diviseur de a et b, le produit $(x^\mu - 1)(x^d - 1)$ est divisible par $(x^a - 1)(x^b - 1)$.

* **20.** Démontrer que, a et b étant premiers entre eux, le polynome

$$x^{a(b-1)} + x^{a(b-2)} + \ldots + x^a + 1$$

est divisible par

$$x^{b-1} + x^{b-2} + \ldots + x + 1.$$

* **21.** Pour que deux polynomes f et g de degrés n et p ne soient pas premiers entre eux, il faut et il suffit qu'il existe deux polynomes f_1 et g_1 de degrés $n-1$, $p-1$ au plus, tels qu'on ait l'identité

$$fg_1 + gf_1 \equiv 0.$$

* **22.** Connaissant les restes $R(x)$, $R_1(x)$ d'un polynome $f(x)$ par deux polynomes $g(x)$, $g_1(x)$, premiers entre eux, calculer, sans connaître $f(x)$, le reste de la division de $f(x)$ par $g(x) \times g_1(x)$.

23. Soit $f(x)$, $g(x)$ deux polynomes, dont le second contient un terme indépendant de x ; soit en outre n un entier positif donné. Il existe un polynome Q et un seul de degré moindre que n tel que $f - gQ$ soit divisible par x^n.

Application : $f(x) \equiv 1$, $g(x) \equiv 1 \pm x$.

CHAPITRE II

DES ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ

---

52. Expressions algébriques identiques.— Nous avons appelé polynomes identiques ceux qui sont composés des mêmes termes (après la réduction des termes semblables), et nous avons démontré que deux polynomes sont nécessairement identiques quand ils prennent la même valeur numérique quelles que soient les valeurs numériques attribuées aux variables. Par analogie, nous dirons que deux expressions algébriques quelconques, qui contiennent les mêmes lettres, sont *identiques*, quand elles prennent la même valeur numérique pour tous les systèmes de valeurs des lettres qui y entrent. Une expression algébrique est *identiquement nulle* lorsqu'elle prend la valeur numérique 0, quelles que soient les valeurs attribuées aux lettres qui y figurent. Deux expressions algébriques identiques à une troisième expression algébrique sont identiques entre elles.

Pour marquer que deux expressions algébriques A et B sont identiques, on écrit $A \equiv B$. A est le *premier membre* et B le *second membre* de l'*identité* $A \equiv B$. *Vérifier* une identité, c'est reconnaître que ses deux membres sont identiques. La théorie des opérations sur les nombres permet de transformer certaines expressions algébriques en d'autres expressions iden-

tiques. Voici quelques exemples d'identités, dont la vérification n'offre aucune difficulté :

$$(x-y)^2 \equiv (x+y)^2 - 4xy\,;$$

$$(x^2+y^2)(x'^2+y'^2) \equiv (xx'-yy')^2+(xy'+x'y)^2\,;$$

$$(x^2+y^2)(x'^2+y'^2) \equiv (xx'+yy')^2+(xy'-x'y)^2,$$

et plus généralement

$$(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2) \equiv (x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)^2$$
$$+(x_1y_2-x_2y_1)^2+(x_1y_3-x_3y_1)^2+\cdots+(x_{n-1}y_n-x_ny_{n-1})^2\,;$$

$$-(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)$$
$$\equiv x^4+y^4+z^4-2y^2z^2-2z^2x^2-2x^2y^2\,;$$

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

Étant donné deux expressions algébriques quelconques A et B, si on considère l'expression algébrique $A+B$, il est clair que la valeur numérique qu'elle prend est égale à la somme des valeurs numériques de A et de B, quelles que soient les valeurs numériques attribuées aux lettres qui figurent dans A et B; il est dès lors naturel d'appeler cette expression (et toute expression identique) la *somme* des expressions proposées. De même, l'expression $A-B$ (et toute expression identique), l'expression $A \times B$ (et toute expression identique), seront appelées respectivement la *différence*, le *produit* des expressions A et B. Enfin, l'expression $\frac{A}{B}$ sera le *quotient* de A par B ou le *rapport* de A à B. $\frac{A}{B}$ s'appelle aussi une *fraction*.

Il y a une remarque à faire au sujet de cette dernière expression dans le cas particulier où A et B sont des polynomes à une seule variable. Si l'on exécute sur les deux polynomes A et B l'opération que nous avons appelée division dans la théorie des polynomes, si l'on désigne par Q le polynome que nous avons appelé *quotient* et par R le polynome que nous avons appelé *reste*, on a

$$A \equiv BQ + R,$$

d'où

$$\frac{A}{B} \equiv Q + \frac{R}{B}.$$

L'expression $\frac{A}{B}$, qui représente le quotient de A par B, tel que nous venons de le définir, n'est donc pas, en général, identique au quotient de la division de A par B dans le sens de la théorie des polynomes : l'identité n'a lieu que dans le cas spécial où R est identiquement nul, c'est-à-dire où A est divisible par B. Dans le cas contraire, la fraction rationnelle $\frac{A}{B}$ est la somme d'un polynome et d'une fraction rationnelle ayant le même dénominateur que la fraction proposée et pour numérateur un polynome de degré inférieur au dénominateur.

I. — PRINCIPES GÉNÉRAUX RELATIFS AUX ÉQUATIONS CONSIDÉRÉES ISOLÉMENT

53. Soit A et B deux expressions algébriques contenant une ou plusieurs lettres $x, y, z, \ldots,$ et non identiques. Chercher quelles valeurs il faut attribuer à ces lettres pour faire prendre aux deux expressions des valeurs numériques égales, c'est ce qu'on appelle *résoudre l'équation* $A = B$. Les lettres $x, y, z, \ldots$ se nomment les *inconnues* de l'équation. Tout système de valeurs répondant à la question est une *solution* de l'équation. Dans le cas d'une seule inconnue, on dit souvent *racine* au lieu de solution. On dit que les solutions (ou les racines) d'une équation *vérifient* cette équation ou *satisfont* à cette équation. Une équation a deux *membres* : ce sont les deux expressions séparées par le signe $=$. Le premier membre est à gauche, le second est à droite du signe $=$.

On dit que deux équations qui renferment les mêmes inconnues sont *équivalentes*, quand elles ont les mêmes solutions. Ainsi, pour démontrer que deux équations (1) et (2) sont équi-

valentes, il faut montrer : 1° que toute solution de (1) est solution de (2) ; 2° que, réciproquement, toute solution de (2) est solution de (1).

54. Nous allons démontrer deux principes permettant de transformer une équation en une autre équivalente.

Principe I. — *Quand on ajoute une même expression algébrique* C *aux deux membres de l'équation*

$$(1) \qquad A = B,$$

on obtient une équation

$$(2) \qquad A + C = B + C$$

équivalente à l'équation (1), *pourvu qu'à chaque solution de l'équation* (1) *corresponde une valeur numérique de* C.

En effet, soit $(x_1, y_1, z_1, \ldots)$ une solution de l'équation (1) ; appelons a, b, c les valeurs numériques de A, B, C pour $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1, \ldots$. Par hypothèse, $a = b$: donc $a + c = b + c$, et $(x_1, y_1, z_1, \ldots)$ est solution de l'équation (2). Réciproquement, si $(x_1, y_1, z_1, \ldots)$ est solution de (2), on a, avec les mêmes notations, $a + c = b + c$: donc $a = b$, et $(x_1, y_1, z_1, \ldots)$ est solution de (1).

Ce principe permet de faire passer un terme d'un membre d'une équation dans l'autre ; il suffit de l'effacer dans le membre où il se trouve et de l'écrire dans l'autre avec le signe contraire de celui qu'il a dans le membre où il est. En particulier, ce principe permet de faire passer tous les termes de l'équation dans son premier membre. L'équation $A = B$ équivaut à l'équation $A - B = 0$.

Principe II. — *Quand on multiplie par un même nombre* m DIFFÉRENT DE 0 *les deux membres d'une équation*

$$(1) \qquad A = B,$$

on obtient une équation

$$(2) \qquad Am = Bm$$

équivalente à l'équation (1).

En effet, soit $(x_1, y_1, z_1, \ldots)$ une solution de l'équation (1); appelons a, b les valeurs numériques de A, B pour $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1, \ldots$. Par hypothèse, $a = b$: donc $am = bm$, et $(x_1, y_1, z_1, \ldots)$ est solution de l'équation (2). Réciproquement, si $(x_1, y_1, z_1, \ldots)$ est solution de (2), on a $am = bm$, ou $(a - b)m = 0$; mais m est différent de 0, donc $a = b$, et $(x_1, y_1, z_1, \ldots)$ est solution de (1).

Inversement, quand on divise par un même nombre différent de 0 les deux membres d'une équation, on obtient une équation équivalente à la proposée. Cette réciproque est en effet impliquée par le théorème direct. En particulier, on pourra changer les signes de tous les termes d'une équation, car cela revient à multiplier les deux membres par -1. Ainsi l'équation $2x-5=3x+11$ est équivalente à $-2x+5=-3x-11$. On peut dire aussi que cela revient à faire passer les termes du premier membre dans le second et ceux du second membre dans le premier.

55. Une équation est dite *entière* quand ses deux membres sont des polynomes entiers par rapport aux inconnues. Soit $A = B$ une telle équation. Mettons-la sous la forme $A - B = 0$, puis faisons, dans le polynome $A - B$, la réduction des termes semblables. Si le polynome réduit ainsi obtenu est de degré 0, l'équation n'a aucune solution ; sinon, le degré de ce polynome est ce qu'on appelle le *degré* de l'équation ; les coefficients de ce polynome sont les *coefficients* de l'équation.

Ainsi une équation du premier degré à une inconnue x peut toujours se mettre sous la forme $ax + b = 0$, a et b désignant deux nombres connus dont le premier est différent de 0 ; une équation du premier degré à deux inconnues x, y se ramène à la forme $ax + by + c = 0$, a, b, c désignant trois nombres connus dont les deux premiers sont différents de 0 ; une équation du premier degré à trois inconnues x, y, z se ramène à la forme $ax + by + cz + d = 0$, a, b, c, d désignant quatre nombres connus dont les trois premiers sont différents de 0, etc.

56. Résolution d'une équation du premier degré à une inconnue. — Soit l'équation $ax + b = 0$, $a \neq 0$. Il faut calculer x de façon que la somme des deux nombres ax et b soit nulle, ou, ce qui revient au même, de façon que ax égale $-b$. Or, a étant différent de 0, il existe un nombre x et un seul tel que ax égale $-b$, c'est le quotient de $-b$ par a : $-\frac{b}{a}\cdot$ Ainsi une équation du premier degré à une inconnue, $ax + b = 0$, admet une racine et une seule donnée par la formule $x = -\frac{b}{a}\cdot$

Appelons x' cette racine. x' est ce qu'on appelle la *racine du binome* $ax + b$. On a l'identité

$$ax + b \equiv a(x - x'),$$

d'où il résulte que le binome $ax + b$ a le signe de $+a$ pour les valeurs de x supérieures à sa racine et le signe de $-a$ pour les valeurs de x inférieures à sa racine.

57. Exemples :

1° Résoudre l'équation

$$(1) \qquad 3x - \frac{1}{2} + \frac{3x}{4} = \frac{5x}{16} + 27.$$

Cette équation équivaut (principe II) à la suivante :

$$48x - 8 + 12x = 5x + 432,$$

laquelle équivaut (principe I) à

$$(2) \qquad 55x - 440 = 0.$$

Or l'équation (2) admet une racine et une seule,

$$x = \frac{440}{55} = 8 :$$

8 est racine de l'équation (1), qui n'en admet pas d'autre.

2° Résoudre l'équation

$$(1) \qquad \frac{2x + 7b}{2a + b} = 1 + \frac{x + a}{2a - b},$$

dans laquelle x est l'inconnue ; les lettres a et b désignent des nombres connus quelconques, tels cependant que $2a+b$, $2a-b$ soient simultanément différents de 0.

Cette équation équivaut (principe II) à celle-ci :

$$(2a-b)(2x+7b) = 4a^2 - b^2 + (2a+b)(x+a),$$

laquelle équivaut (principe I) à

$$(2) \qquad (2a-3b)x - 6a^2 + 13ab - 6b^2 = 0.$$

Supposons $2a-3b \neq 0$; alors l'équation (2), et par suite l'équation (1), a une racine et une seule, donnée par la formule

$$x = \frac{6a^2 - 13ab + 6b^2}{2a-3b} = 3a - 2b.$$

Supposons $2a-3b = 0$; l'équation (2) devient

$$0 \times x - 6a^2 + 13ab - 6b^2 = 0,$$

et deux cas sont à distinguer :

1er Cas : $6a^2 - 13ab + 6b^2 \neq 0$; (2) n'a aucune solution, et (1) n'en a pas non plus.

2e Cas : $6a^2 - 13ab + 6b^2 = 0$. Le premier membre de (2) est un polynome nul identiquement : tout nombre algébrique est solution de (2) et par suite de (1). Les deux membres de (1) sont alors des polynomes en x qui sont identiques : (1) est une identité et non une équation.

58. Problème des mobiles. — Deux mobiles se meuvent d'un mouvement uniforme sur une même droite $x'x$. On donne la vitesse et le sens du mouvement de chaque mobile. On indique la position de chacun d'eux à une certaine époque, que nous appellerons l'origine des temps ; quelle est l'époque de leur rencontre ?

Choisissons sur la droite un sens positif $x'x$ et une origine des abscisses O. Soient v et v' les valeurs algébriques des vitesses des deux mobiles, a et a' les abscisses des positions A et A' des mobiles à l'origine des temps : v, v', a, a' sont les données du problème. Soit enfin x l'intervalle de temps séparant l'origine des temps de l'époque de la rencontre, précédé

du signe $+$ ou du signe $-$, suivant que la rencontre a lieu après ou avant l'origine des temps. x est l'inconnue du problème.

M étant le point de rencontre, on a d'une part $\overline{OM} = a + vx$, d'autre part $\overline{OM} = a' + v'x$: donc

$$a + vx = a' + v'x,$$

équation équivalente à

$$(1) \qquad (v - v')x + a - a' = 0.$$

Si $v \neq v'$, x est la racine d'une équation du premier degré :

$$x = \frac{a' - a}{v - v'}.$$

Les deux mobiles se rencontrent à une époque bien déterminée, postérieure ou antérieure à l'origine des temps, suivant que le nombre $\frac{a' - a}{v - v'}$ est positif ou négatif.

Supposons $v = v'$; l'équation (1) devient

$$0 \times x + a - a' = 0.$$

Si $a \neq a'$, elle n'a aucune solution : les deux mobiles ne se rencontrent jamais, ce qui est évident de soi-même, car dire que $v = v'$, c'est dire que les deux mobiles marchent avec la même vitesse dans le même sens : ils restent donc toujours à la même distance AA'. Si $a = a'$, le polynome $(v - v')x + a - a'$ est identiquement nul ; (1) est une identité et non une équation. Tout nombre répond à la question : les deux mobiles ne se quittent pas, ce qui est encore évident.

59. Discussion de l'équation $ax + b = m(a'x + b')$.

Posons-nous la question suivante : Quelles sont les valeurs que prend la fraction $\frac{ax + b}{a'x + b'}$ $(a' \neq 0)$, lorsqu'on donne à x toutes les valeurs possibles ?

Pour y répondre, nous allons résoudre l'équation

$$(1) \qquad \frac{ax + b}{a'x + b'} = m.$$

Toute racine de (1) vérifie l'équation

$$(2) \qquad ax + b - m(a'x + b') = 0.$$

Réciproquement, toute racine de (2), autre que $-\frac{b'}{a'}$, est racine de (1). D'ailleurs, si $-\frac{b'}{a'}$ est racine de (2), on a $-\frac{ab'}{a'} + b = 0$, ou $ab' - a'b = 0$, et la fraction $\frac{ax + b}{a'x + b'}$ a une valeur constante, quel que soit x. Supposons $ab' - a'b \neq 0$; alors (2) équivaut à (1). Or, si $m \neq \frac{a}{a'}$, (2) a une racine et une seule, et si $m = \frac{a}{a'}$, (2) n'a aucune racine. La fraction considérée prend donc une fois et une seule n'importe quelle valeur, sauf une valeur exceptionnelle $\frac{a}{a'}$. Nous savions déjà que, dans le cas où $ab' - a'b \neq 0$, à deux valeurs distinctes de x correspondent deux valeurs différentes pour la fraction et que par suite l'équation (1) n'a pas plus d'une racine ; nous venons de prouver que, quel que soit m, pourvu que m soit $\neq \frac{a}{a'}$, elle en a toujours une.

60. Résolution d'une équation du premier degré à plusieurs inconnues. — Considérons l'équation

$$ax + by + c = 0, \qquad ab \neq 0,$$

où les inconnues sont x et y. Cette équation équivaut à celle-ci :

$$x = -\frac{by + c}{a}.$$

On voit que l'inconnue y peut être prise à volonté, car, en donnant à y une valeur quelconque, on aura toujours une valeur correspondante de x qui satisfera à l'équation.

De même, si on a l'équation

$$ax + by + cz + d = 0, \qquad abc \neq 0,$$

où les inconnues sont x , y et z, cette équation équivaut à

$$x = -\frac{by + cz + d}{a}.$$

On voit que les inconnues y et z peuvent être prises à volonté, car, en donnant à y et à z des valeurs quelconques, on aura toujours une valeur correspondante de x qui satisfera à l'équation.

D'une manière générale, *une équation du premier degré à n inconnues* ($n > 1$) *a une infinité de solutions, et l'on peut choisir arbitrairement les valeurs de* $n - 1$ *inconnues.*

Inéquations.

61. Soit A et B deux expressions algébriques contenant des lettres x, y, z, ..., et non identiques. Chercher pour quelles valeurs de x, y, z, ... la valeur numérique de A est plus grande que celle de B, c'est *résoudre l'inéquation* $A > B$. Chercher pour quelles valeurs de x, y, z, ... la valeur numérique de A est plus petite que celle de B, c'est *résoudre l'inéquation* $A < B$. Les lettres $x, y, z, \ldots$ se nomment les *inconnues* de l'inéquation. Tout système de valeurs répondant à la question est une *solution* de l'inéquation. A est le *premier membre* et B le *second membre* de l'inéquation $A > B$.

On dit que deux inéquations, qui contiennent les mêmes inconnues, sont *équivalentes*, quand elles ont les mêmes solutions.

Voici deux principes permettant de transformer une inéquation en une autre équivalente :

1° *Si on ajoute une même expression algébrique* C *aux deux membres d'une inéquation*

(1) $$A > B,$$

on obtient une inéquation

(2) $$A + C > B + C$$

équivalente à la première, pourvu qu'à chaque solution de l'inéquation (1) *corresponde une valeur numérique de* C.

En effet, soit $(x_1, y_1, z_1, \ldots)$ une solution de l'inéquation (1), et appelons a, b, c les valeurs numériques de A, B, C pour $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$, ... On a, par hypothèse, $a > b$, et par suite $a + c > b + c$. Donc $(x_1, y_1, z_1, \ldots)$ est solution de l'inéquation (2). Réciproquement, toute solution de (2) est solution de (1).

2° *Si on multiplie (ou si on divise) par un même nombre* m DIFFÉRENT DE ZÉRO *les deux membres d'une inéquation* (1) $A > B$, *on obtient une nouvelle inéquation équivalente, à condition de garder le sens de l'inéquation si* m *est positif, de le changer si* m *est négatif.*

Soit $m > 0$. Montrons que l'inéquation (1) équivaut à l'inéquation (2) $mA > mB$. Soit $(x_1, y_1, z_1, \ldots)$ une solution de (1); appelons a, b les valeurs numériques de A, B pour $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$, ... On a, par hypothèse, $a > b$: donc $ma > mb$, et $(x_1, y_1, z_1, \ldots)$ est une solution de (2). Réciproquement, toute solution de (2) vérifie (1).

Si m était négatif, l'inéquation (1) équivaudrait à l'inéquation (3) $mA < mB$.

Le premier principe permet de faire passer un terme d'un membre d'une inéquation dans l'autre en changeant son signe. Si les deux membres sont des polynomes en $x, y, z, \ldots$, et si m est le degré du polynome obtenu en faisant passer tous les termes dans un même membre et en faisant la réduction des termes semblables, l'inéquation est dite *de degré* m. Ainsi une inéquation du premier degré à une inconnue x peut toujours se ramener à la forme $ax + b > 0$, $a \neq 0$. Si a est positif, elle équivaut à $x > -\frac{b}{a}$, tandis que, si a est négatif, elle équivaut à $x < -\frac{b}{a}\cdot$ De même, l'inéquation $ax + b < 0$ équivaut, suivant les cas, à $x < -\frac{b}{a}$ ou à $x > -\frac{b}{a}\cdot$ On retrouve ce résultat, que le binome $ax + b$ a le signe de $+a$ pour les valeurs de x supérieures à sa racine, le signe de $-a$ pour les valeurs de x inférieures à sa racine.

Remarques importantes.

62. Remarque I. — *Pour résoudre l'équation*

(1) $$AB = 0,$$

on résout les équations

$$(2)\quad A = 0 \qquad et \qquad (3)\quad B = 0.$$

On ne garde des solutions de (2) *que celles auxquelles correspond une valeur numérique de* B, *et des solutions de* (3) *que celles auxquelles correspond une valeur numérique de* A.

En effet, pour qu'un système de valeurs des inconnues annule le produit AB, il faut qu'il annule l'un des facteurs ; mais cela ne suffit pas : il faut encore qu'à ce système corresponde une valeur numérique de l'autre facteur. Tout système de valeurs des inconnues auquel correspondent des valeurs numériques a, b dont une au moins est nulle est une solution de l'équation (1).

Dans le cas particulier où A *et* B *sont des polynomes, toutes les solutions des équations* (2) *et* (3) *conviennent*. On dit que l'équation (1) *se décompose* en deux équations (2) et (3).

Ainsi, $f(x)$ étant un polynome en x de degré m, si nous connaissons une racine a de l'équation $f(x) = 0$, nous savons que $f(x) \equiv (x-a)\varphi(x)$, où $\varphi(x)$ est un polynome de degré $m-1$, et les racines restantes de l'équation $f(x) = 0$, s'il y en a, pourront être calculées si l'on sait résoudre l'équation $\varphi(x) = 0$ de degré $m-1$. De même, si nous connaissons deux racines a, b de l'équation $f(x) = 0$, nous savons que $f(x) \equiv (x-a)(x-b)\psi(x)$, où $\psi(x)$ est un polynome de degré $m-2$, et les racines restantes de $f(x) = 0$ pourront être calculées si l'on sait résoudre l'équation $\psi(x) = 0$ de degré $m-2$, et ainsi de suite. Par exemple, l'équation

$$(x-a)(\alpha x + \alpha') + (x-a)(\beta x + \beta') + (x-a)(\gamma x + \gamma') = 0$$

admet la racine a, et, si on l'écrit

$$(x-a)[(\alpha + \beta + \gamma)\,x + (\alpha' + \beta' + \gamma')] = 0,$$

on voit que, dans le cas où $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$, elle admet en outre la racine $-\dfrac{\alpha'+\beta'+\gamma'}{\alpha+\beta+\gamma}$.

Soit encore $f(x)=0$, $\varphi(x)=0$ deux équations entières à une inconnue x. Soit $r(x)$ le plus grand commun diviseur des polynomes $f(x)$, $\varphi(x)$. Supposons que $r(x)$ ne soit pas une constante. On a $f(x)\equiv r(x)f_1(x)$, $\varphi(x)\equiv r(x)\varphi_1(x)$, f_1 et φ_1 étant deux polynomes. Les racines de $r(x)$ sont des racines communes aux deux équations proposées. Inversement, supposons que les équations proposées aient une racine commune a; alors $x-a$ sera un diviseur commun à f et à φ : ce sera donc un diviseur du plus grand commun diviseur $r(x)$ de f et de φ, et a sera racine de l'équation $r(x)=0$. D'après cela, pour voir si les équations proposées ont une ou plusieurs racines communes, on calculera le plus grand commun diviseur $r(x)$ entre $f(x)$ et $\varphi(x)$. Si c'est une constante, les équations n'ont pas de racine commune. Sinon, elles ont une ou plusieurs racines communes, qui sont les racines de l'équation $r(x)=0$.

63. Remarque II. — *Pour résoudre une équation de la forme*

$$(1)\qquad \frac{A}{B}=0,$$

on résout l'équation

$$(2)\qquad A=0.$$

On ne garde des solutions de cette équation que celles auxquelles correspond une valeur numérique de B *différente de zéro.*

En effet, pour qu'un système de valeurs des inconnues annule la fraction $\frac{A}{B}$, il faut qu'il annule le numérateur; mais cela ne suffit pas : il faut en outre qu'à ce système de valeurs corresponde une valeur numérique b de B, ensuite que b soit $\neq 0$. Tout système de valeurs des inconnues auquel correspondent des valeurs numériques a, b telles que $a=0$, $b\neq 0$, est une solution de l'équation (1).

Remplacer l'équation $\frac{A}{B}=0$ par l'équation $A=0$, c'est ce qu'on appelle *chasser le dénominateur* de l'équation donnée.

Exemple. — Soit à résoudre l'équation

$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x+a}=\frac{1}{x^2-a^2}.$$

Observons tout d'abord qu'aucun des deux nombres $+a$, $-a$ ne peut être racine. Cela posé, d'après le principe I, l'équation équivaut à la suivante :

$$\frac{x+a}{x^2-a^2}+\frac{x-a}{x^2-a^2}-\frac{1}{x^2-a^2}=0,$$

ou

$$(1) \qquad \frac{2x-1}{x^2-a^2}=0.$$

Résolvons l'équation (2) $2x-1=0$; elle donne $x=\frac{1}{2}$. Si $\frac{1}{2}$ est égal à $+a$ ou à $-a$, c'est-à-dire si $a=\pm\frac{1}{2}$, l'équation proposée n'a pas de solution. Dans le cas contraire, le nombre $\frac{1}{2}$, n'annulant pas x^2-a^2, est la solution (unique) de l'équation proposée.

64. Remarque III. — Considérons une équation de la forme

$$(1) \qquad A=\sqrt[n]{B},$$

n étant entier positif. Soit $(x_1, y_1, z_1, \ldots)$ une solution de cette équation. Appelons a, b les valeurs de A, B pour $x=x_1$, $y=y_1$, $z=z_1$, ... On a, par hypothèse, $a=\sqrt[n]{b}$; donc $a^n=b$, de sorte que $(x_1, y_1, z_1, \ldots)$ est solution de l'équation

$$(2) \qquad A^n=B.$$

Ainsi les solutions de (1), s'il y en a, sont des solutions de (2). Si donc l'équation (2) n'a pas de solution, l'équation (1) n'en a pas non plus. Supposons que l'équation (2) ait une solution $(x_1, y_1, z_1, \ldots)$, faisant prendre à A et à B les valeurs a et b. Par hypothèse, $a^n=b$. Si n est impair, on en conclut $a=\sqrt[n]{b}$, et $(x_1, y_1, z_1, \ldots)$ est solution de l'équation (1). Si n est pair, comme a^n est égal à b, on a nécessairement $b\geqslant 0$, et, de plus, $a=+\sqrt[n]{b}$ ou $a=-\sqrt[n]{b}$. Donc $(x_1, y_1, z_1, \ldots)$ est solution de l'équation (1) ou de l'équation

$$(3) \qquad A=-\sqrt[n]{B}.$$

Si $a=+\sqrt[n]{b}$, on a $a\geqslant 0$; si $a=-\sqrt[n]{b}$, on a $a\leqslant 0$.

D'après cela, si la solution $(x_1, y_1, z_1, \ldots)$ satisfait à l'inéquation $A > 0$, c'est une solution de l'équation (1); si elle satisfait à l'inéquation $A < 0$, c'est une solution de l'équation (3); enfin si elle satisfait à l'équation $A = 0$, par cela même, elle satisfait à l'équation $B = 0$, et c'est une solution de (1) et de (3).

En résumé, *si n est impair,* (2) *équivaut à* (1); *si n est pair, pour résoudre* (1), *on résout* (2), *et on ne garde des solutions trouvées que celles qui satisfont à l'inéquation* $A \geqslant 0$. Remplacer l'équation (1) par l'équation (2), c'est ce qu'on appelle *chasser le radical.* On voit que, si n est pair, l'équation (2) n'est pas nécessairement équivalente à l'équation (1).

Exemples : Soit à résoudre l'équation

(1) $$\sqrt{x} = a.$$

Résolvons l'équation

(2) $$x = a^2;$$

elle n'a qu'une racine, a^2. Si a est positif ou nul, a^2 est racine de (1); si a est négatif, (1) n'a pas de racine, ce qui est évident *a priori*; a^2 est racine de $-\sqrt{x} = a$.

Soit encore à résoudre l'équation

(1) $$\sqrt{x^2 + a} = x - 1.$$

Résolvons d'abord l'équation

(2) $$x^2 + a = (x - 1)^2;$$

elle n'admet qu'une racine, $\frac{1-a}{2}$. Pour que cette racine satisfasse à l'équation (1), il faut et il suffit qu'elle soit supérieure ou égale à 1. Or l'inégalité $\frac{1-a}{2} \geqslant 1$ équivaut à $a \leqslant -1$. Ainsi, pour $a \leqslant -1$, l'équation (1) admet la racine unique $\frac{1-a}{2}$; pour $a > -1$, l'équation (1) n'admet pas de racine.

65. Terminons par trois remarques concernant les inéquations :

I. — *Pour résoudre une inéquation de la forme* $AB > 0$, *on cherche les systèmes de valeurs de* $x, y, z, \ldots$ *vérifiant simultanément les inéquations* $A > 0$, $B > 0$, *ou simultanément les inéquations* $A < 0$, $B < 0$.

II. — *L'inéquation* $\frac{A}{B} > 0$ *équivaut à l'inéquation* $AB > 0$.

III. — Soit à résoudre une inéquation de la forme

(1) $$A > \sqrt[n]{B}.$$

Supposons n impair. Soit $(x_1, y_1, z_1, \ldots)$ une solution de cette inéquation, faisant prendre à A, B les valeurs numériques a, b. On a par hypothèse $a > \sqrt[n]{b}$, d'où $a^n > b$. Donc $(x_1, y_1, z_1, \ldots)$ vérifie l'inéquation

(2) $$A^n > B.$$

Inversement, toute solution de (2) vérifie (1). Ainsi, *pour* n *impair, les inéquations* (1) *et* (2) *sont équivalentes.*

Supposons maintenant n pair. Soit de nouveau $(x_1, y_1, z_1, \ldots)$ une solution de (1). On a, avec les mêmes notations, $a > \sqrt[n]{b}$, ce qui exige $b > 0$, $a > 0$, et on en conclut $a^n > b$, de sorte que $(x_1, y_1, z_1, \ldots)$ vérifie l'inéquation (2). La réciproque n'est pas vraie : un système de valeurs rendant B négative et donnant un sens à A vérifie l'inéquation (2) et ne vérifie pas l'inéquation (1). Considérons maintenant un système de valeurs vérifiant (2) et rendant B positive ; un tel système ne peut annuler A ; s'il rend A positive, il vérifiera (1) ; s'il rend A négative, il vérifie, non pas (1), mais $A < \sqrt[n]{B}$. En résumé, *si* n *est pair, pour résoudre* (1), *on résout* (2), *et on ne garde des systèmes de valeurs trouvés que ceux qui satisfont à la fois aux deux inéquations* $A > 0$, $B > 0$.

Soit enfin à résoudre l'inéquation

(3) $$A < \sqrt[n]{B}.$$

Si n *est impair, elle équivaut à l'inéquation*

(4) $$A^n < B.$$

Supposons n pair. Tout système de valeurs rendant B posi-

tive ou nulle et A négative ou nulle satisfait à l'inéquation (3), pourvu qu'il ne rende pas nulles à la fois B et A. Considérons maintenant des nombres satisfaisant à (3) et rendant A positive ; ces nombres rendent B positive et satisfont par conséquent à l'inéquation (4). Inversement, tout système de nombres vérifiant l'inéquation (4) rend B positive et satisfait, dans tous les cas, à l'inéquation (3). Ainsi, *pour n pair, les solutions de* (3) *sont les systèmes de valeurs satisfaisant à* $A \leqslant 0$, $B \geqslant 0$ (*excepté ceux qui satisfont à la fois à* $A = 0$, $B = 0$), *et, parmi ceux qui rendent* $A > 0$, *tous ceux qui vérifient l'inéquation* (4).

EXERCICES

1. Vérifier l'identité

$$(b-c)[(x-a)^2+y^2]+(c-a)[(x-b)^2+y^2]+(a-b)[(x-c)^2+y^2] + (b-c)(c-a)(a-b) \equiv 0.$$

2. Montrer que l'expression

$$\frac{(y-z)x^m+(z-x)y^m+(x-y)z^m}{(y-z)(z-x)(x-y)}$$

est identique à un polynome en x, y, z. Trouver ce polynome.

***3.** $f(x)$ étant un polynome entier en x, et u et v deux polynomes premiers entre eux, il existe deux polynomes A et B tels qu'on ait l'identité

$$\frac{f(x)}{uv} \equiv \frac{A}{u} + \frac{B}{v}.$$

Plus généralement, u, v, w étant des polynomes premiers entre eux deux à deux, il existe des polynomes A, B, C tels qu'on ait l'identité

$$\frac{f(x)}{uvw} = \frac{A}{u} + \frac{B}{v} + \frac{C}{w}.$$

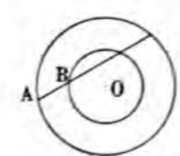
4. $f(x)$ étant un polynome de degré $2n-1$, il existe un système et un seul de nombres a_1, b_1, a_2, b_2, ... tels qu'on ait l'identité

$$\frac{f(x)}{(x^2+px+q)^n} \equiv \frac{a_1x+b_1}{(x^2+px+q)^n} + \frac{a_2x+b_2}{(x^2+px+q)^{n-1}} + \cdots + \frac{a_nx+b_n}{x^2+px+q}.$$

5. Résoudre les équations

$$\sqrt{x} - \sqrt{x - \lambda} = \lambda; \qquad x = \left(\frac{\lambda-1}{2}\right)^2$$
$$\pm \sqrt{x - a} \pm \sqrt{x + b} = \lambda;$$
$$\sqrt{x} - \sqrt{x + \sqrt{1 - x}} = 1; \qquad x = 0$$
$$\sqrt{x} + \sqrt{x - \sqrt{1 - x}} = 1; \qquad x = \frac{16}{25}$$
$$\sqrt{x} - \sqrt{x - \sqrt{1 - x}} = 1.$$

6. On donne, sur un axe $x'x$, quatre points A, B, A', B'; et, en dehors de cet axe, deux points C, C'. Soit D, E, D', E' les points de rencontre des droites CA, CB, C'A', C'B' avec une droite parallèle à $x'x$. Déterminer la position de cette seconde droite de manière que $\dfrac{\overline{DE}}{\overline{D'E'}} = \lambda$.



7. On donne deux cercles concentriques de rayons R, R' (R > R'), et on demande de les couper par une sécante telle que $AB = a$. On prendra comme inconnue la distance de O à AB. Discussion.

$x = \sqrt{4a^2R^2 - (R^2 - R'^2 + a^2)^2} : 2a$

8. Calculer le rayon d'un cercle connaissant les longueurs l, l' de deux cordes parallèles et leur distance d. Si l' est la corde la plus longue

$x = \left[\sqrt{(l'^2 - l^2 - 4d^2)^2 + 4d^2l'^2}\right] : 4d$

II. — PRINCIPES GÉNÉRAUX RELATIFS AUX ÉQUATIONS SIMULTANÉES

66. Systèmes d'équations. — Étant donné plusieurs équations

$$A = 0, \qquad B = 0, \qquad C = 0$$

à une ou à plusieurs inconnues $x, y, z, \ldots$, chercher leurs solutions communes, c'est-à-dire les systèmes de valeurs des inconnues qui les vérifient toutes à la fois, c'est *résoudre le système des équations proposées*. Un tel système de valeurs des inconnues se nomme une *solution* du système des équations proposées.

On dit qu'une équation est *une conséquence* d'un système quand toute solution du système est solution de l'équation.

Un système est formé d'*équations distinctes* quand aucune d'elles n'est une conséquence du système formé par les autres.

Systèmes équivalents. — On dit que deux systèmes d'équations qui renferment les mêmes inconnues sont *équivalents*, quand ils ont les mêmes solutions. Pour démontrer que deux systèmes (1) et (2) sont équivalents, il faut faire voir que toute solution de (1) est solution de (2), et réciproquement.

Quand, dans un système (1) de n équations, p équations sont des conséquences du système (2) formé par les $(n-p)$ autres, le système (1) est équivalent au système (2).

67. Théorème. — *Lorsque l'une des équations d'un système est résolue par rapport à x, c'est-à-dire est de la forme $x = A$, A ne contenant pas x, si on remplace x par A dans les équations restantes, le nouveau système ainsi obtenu est équivalent à l'ancien.*

Ainsi le système

$$(1) \qquad x = A, \qquad B = 0, \qquad C = 0,$$

où B, C peuvent renfermer toutes les inconnues et où A peut renfermer toutes les inconnues autres que x, équivaut au système

$$(2) \qquad x = A, \qquad B' = 0, \qquad C' = 0,$$

dans lequel B' et C' sont les expressions obtenues en remplaçant x par A dans B et C.

Soit $(x_1, y_1, z_1, \ldots)$ une solution du système (1). Pour $y = y_1$, $z = z_1$, $\ldots$, A prend la valeur numérique x_1, et pour $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$, $\ldots$, B et C s'annulent. Or B', c'est B où l'on a remplacé x par A ; la valeur numérique de B' pour $y = y_1$, $z = z_1$, $\ldots$, est donc la même que la valeur numérique de B pour $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$, $\ldots$; c'est-à-dire 0. De même C' s'annule pour $y = y_1$, $z = z_1$, $\ldots$. Donc $(x_1, y_1, z_1, \ldots)$ est solution de (2). Réciproquement, soit $(x_1, y_1, z_1, \ldots)$ une solution de (2). Pour $y = y_1$, $z = z_1$, $\ldots$, A prend la valeur numérique x_1, B' et C' prennent la valeur numérique 0. Donc, pour $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$, $\ldots$, B et C s'annulent, et $(x_1, y_1, z_1, \ldots)$ est bien une solution de (1).

68. *Applications.* 1° Résoudre le système

$$(1)\qquad \begin{cases} 4x+3y-24=0,\\ 5x-2y-\ \ 7=0. \end{cases}$$

Il équivaut au suivant :

$$(2)\begin{cases} x=\dfrac{24-3y}{4},\\ 5\dfrac{24-3y}{4}-2y-7=0, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x=\dfrac{24-3y}{4},\\ -23y+92=0, \end{cases}$$

qui admet une solution et une seule : $y=4,\quad x=3.$

2° Résoudre le système

$$(1)\qquad \begin{cases} 8x+14y-3=0,\\ 12x+21y-5=0. \end{cases}$$

Il équivaut au suivant :

$$(2)\begin{cases} x=\dfrac{3-14y}{8},\\ 12\dfrac{3-14y}{8}+21y-5=0, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x=\dfrac{3-14y}{8},\\ 0\times y-4=0, \end{cases}$$

qui n'a aucune solution : le proposé n'en a donc pas non plus.

3° Résoudre le système

$$(1)\qquad \begin{cases} 56x+98y-14=0,\\ 44x+77y-11=0. \end{cases}$$

Ce système équivaut au suivant :

$$(2)\begin{cases} x=\dfrac{14-98y}{56},\\ 44\dfrac{14-98y}{56}+77y-11=0, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x=\dfrac{14-98y}{56},\\ 0\times y+0=0, \end{cases}$$

lequel équivaut à la seule équation $x=\dfrac{14-98y}{56}$, qui n'est autre que la première des équations (1). Le système proposé admet donc une infinité de solutions et l'on peut choisir à volonté la valeur de l'une des inconnues.

4° Proposons-nous enfin de résoudre le système

$$(1)\qquad \begin{cases} 3x - 2y + z = 1, \\ 5x + y + 2z = 3, \\ 9x + 7y + 4z = k, \end{cases}$$

k désignant un nombre connu.

Ce système équivaut au suivant :

$$(2)\begin{cases} z = 1 - 3x + 2y, \\ 5x+y+2(1-3x+2y)=3, \\ 9x+7y+4(1-3x+2y)=k, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} z = 1 - 3x + 2y, \\ -x+5y-1=0, \\ -3x+15y+4-k=0. \end{cases}$$

Laissons de côté la première des équations de ce système, et considérons le système formé par les deux équations restantes. Il équivaut à

$$(3)\begin{cases} x = 5y - 1, \\ -3(5y-1)+15y+4-k=0, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = 5y - 1, \\ 0\times y+7-k=0. \end{cases}$$

En résumé, le système (1) équivaut à celui-ci :

$$(4)\qquad \begin{cases} z = 1 - 3x + 2y, \\ x = 5y - 1, \\ 0\times y + 7 - k = 0, \end{cases}$$

qui n'a aucune solution si $k \neq 7$: le proposé n'en a donc pas non plus dans ce cas-là. Au contraire, si $k = 7$, il admet une infinité de solutions, et on peut choisir à volonté l'inconnue y.

On voit, par les exemples qui précèdent, qu'un système d'équations du premier degré peut avoir une solution, ou n'en avoir aucune, ou enfin en avoir une infinité. Nous démontrerons bientôt que ce sont là les seules circonstances qui peuvent se présenter, quels que soient le nombre des équations et celui des inconnues.

69. Remarque. — Il arrive souvent qu'on a à résoudre un système de la forme

$$(1)\qquad AB = 0, \qquad C = 0, \qquad D = 0.$$

Pour cela, on résout les deux systèmes

(2) $A = 0, \qquad C = 0, \qquad D = 0,$

(3) $B = 0, \qquad C = 0, \qquad D = 0.$

Les solutions de (1) sont les solutions de (2) auxquelles correspondent des valeurs numériques de B et les solutions de (3) auxquelles correspondent des valeurs numériques de A. Dans le cas particulier où A et B sont des polynomes, toutes les solutions des systèmes (2) et (3) conviennent. On dit que le système (1) se *décompose* en deux systèmes (2) et (3).

70. Principe de l'addition algébrique. — Considérons un système d'équations à une ou plusieurs inconnues

(1) $A = 0, \qquad B = 0, \qquad C = 0,$

et l'équation

(2) $$\alpha A + \beta B + \gamma C = 0,$$

où α, β, γ sont des nombres quelconques. Le principe de l'addition algébrique consiste en ce que *toute solution du système* (1) *est solution de l'équation* (2). Ce principe est évident.

Ajoutons que, si $\alpha \neq 0$, l'équation (2) *peut remplacer* la première équation (1), c'est-à-dire que le système (1) équivaut au suivant :

(3) $\alpha A + \beta B + \gamma C = 0, \qquad B = 0, \qquad C = 0.$

D'abord toute solution de (1) est solution de (3); il suffit donc de prouver la réciproque. Or, soit $(x_1, y_1, z_1, \ldots)$ une solution de (3) ; appelons a, b, c les valeurs de A, B, C pour $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$, ... On a, par hypothèse,

$$\alpha a + \beta b + \gamma c = 0, \qquad b = 0, \qquad c = 0.$$

Par suite $\alpha a = 0$, et, comme α n'est pas nul, $a = 0$. Donc $(x_1, y_1, z_1, \ldots)$ est solution de (1).

Applications : 1° Les deux systèmes

(1) $A = 0, \qquad B = 0,$

(2) $A + B = 0, \qquad A - B = 0$

sont équivalents. Toute solution de (1) est solution de (2) ; pour

démontrer la réciproque, il suffit de remarquer que, A′ et B′ désignant les premiers membres des équations (2), on a identiquement

$$A' + B' \equiv 2A, \qquad A' - B' \equiv 2B.$$

Par exemple, le système

$$x + y = a, \qquad x - y = b$$

équivaut à

$$2x = a + b, \qquad 2y = a - b;$$

il admet par suite la solution unique

$$x = \frac{a+b}{2}, \qquad y = \frac{a-b}{2}.$$

2° Les deux systèmes

$$(1) \qquad A = 0, \qquad B = 0, \qquad C = 0,$$

$$(2) \quad B + C - A = 0, \quad C + A - B = 0, \quad A + B - C = 0$$

sont équivalents. Car, A′, B′, C′ désignant les premiers membres des équations (2), on a les identités

$$B' + C' \equiv 2A, \qquad C' + A' \equiv 2B, \qquad A' + B' \equiv 2C.$$

Par exemple, le système

$$y + z = a, \qquad z + x = b, \qquad x + y = c$$

équivaut au suivant :

$$2x = b + c - a, \qquad 2y = c + a - b, \qquad 2z = a + b - c,$$

et admet par suite l'unique solution

$$x = \frac{b+c-a}{2}, \qquad y = \frac{c+a-b}{2}, \qquad z = \frac{a+b-c}{2}.$$

3° Le système

$$(1) \qquad A = 0, \qquad B = 0, \qquad C = 0$$

équivaut au suivant :

$$(2) \qquad B + C = 0, \qquad C + A = 0, \qquad A + B = 0.$$

Car, A′, B′, C′ désignant les premiers membres des équations (2), on a les identités

$$B' + C' - A' \equiv 2A, \quad C' + A' - B' \equiv 2B, \quad A' + B' - C' \equiv 2C.$$

Par exemple, le système

$$y+z-x=a, \qquad z+x-y=b, \qquad x+y-z=c$$

équivaut à

$$2x=b+c, \qquad 2y=c+a, \qquad 2z=a+b,$$

et admet par suite la solution unique

$$x=\frac{b+c}{2}, \qquad y=\frac{c+a}{2}, \qquad z=\frac{a+b}{2}.$$

71. Résolution et discussion d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues.

Soit

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} ax+by+c=0, \\ a'x+b'y+c'=0 \end{array} \right.$$

le système proposé. Désignons par D le nombre $ab'-a'b$, et par A et B les nombres que l'on obtient en remplaçant dans D par c et c', d'une part a et a', d'autre part b et b' ; en sorte que

$$\text{A}=cb'-c'b,$$
$$\text{B}=ac'-a'c.$$

Cela posé, nous allons établir la proposition suivante :

Lorsque D *est* $\neq 0$, *le système* (1) *a une solution et une seule ; lorsque* D *est nul, le système* (1) *n'a aucune solution ou en a une infinité, selon que* A *et* B *ne sont pas nuls à la fois ou sont nuls à la fois.*

Désignons par X et Y les premiers membres des équations (1). On a, comme il est facile de le vérifier, les identités

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{r} b'\text{X}-b\text{Y}\equiv \text{D}x+\text{A}, \\ -a'\text{X}+a\text{Y}\equiv \text{D}y+\text{B}. \end{array} \right.$$

Supposons $\text{D}\neq 0$; toute solution de (1) est solution du système

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \text{D}x+\text{A}=0, \\ \text{D}y+\text{B}=0. \end{array} \right.$$

Le système (3) a une solution et une seule. Nous allons montrer

qu'elle vérifie le système (1). Appelons X', Y' les premiers membres des équations (3) ; on a l'identité

$$aX' + bY' \equiv D(ax + by) + Dc \equiv DX.$$

La solution du système (3) vérifie donc l'équation $DX = 0$, et par suite l'équation $X = 0$, puisque D n'est pas nul. Elle vérifie de même l'équation $Y = 0$. Ainsi, pour $D \neq 0$, le système (1) a une solution unique, à savoir la solution de (3).

Supposons maintenant $D = 0$. Les identités (2) deviennent alors

$$b'X - bY \equiv A,$$
$$-a'X + aY \equiv B.$$

Supposons d'abord que les nombres A et B ne soient pas tous deux nuls, par exemple $B \neq 0$. Les coefficients a et a' ne sont pas nuls simultanément ; soit $a \neq 0$. La seconde identité peut s'écrire

$$Y \equiv \frac{a'}{a} X + \frac{B}{a}, \qquad Y \equiv \lambda X + \mu, \qquad \mu \neq 0,$$

et elle montre qu'il est impossible qu'un système de valeurs de x, y annulant X annule aussi Y : le système (1) n'a aucune solution.

Enfin, supposons nuls, en même temps que D, les nombres A et B. Les coefficients a, a' ne sont pas nuls simultanément. Supposons $a \neq 0$. L'identité $-a'X + aY \equiv 0$ s'écrit alors $Y \equiv \frac{a'}{a} X$, $Y \equiv \lambda X$. Elle montre que tout système de valeurs de x, y annulant X annule aussi Y. L'équation $Y = 0$ est une conséquence de $X = 0$. Il suffira donc de résoudre $X = 0$. Or, a étant $\neq 0$, l'équation $X = 0$ équivaut à

$$x = -\frac{c + by}{a} :$$

le système (1) admet donc une infinité de solutions, et l'on peut choisir y arbitrairement.

Remarque. — Nous ne nous sommes servis, dans la démonstration qui précède, que des hypothèses suivantes :

$$D = 0, \qquad a \neq 0, \qquad B = 0.$$

Elles suffisent pour que les équations (1) soient compatibles. Ces hypothèses entraînent donc l'égalité $A = 0$. C'est ce qu'il est facile de vérifier. En effet, des égalités $D = 0$, $B = 0$, on tire, puisque a n'est pas nul,

$$b' = \frac{a'b}{a}, \qquad c' = \frac{a'c}{a};$$

alors

$$A = c\frac{a'b}{a} - \frac{a'c}{a}b = 0.$$

Cas où les équations sont homogènes. Lorsque les termes constants c et c' sont nuls, X et Y sont des polynomes homogènes en x, y ; les équations (1) sont dites alors *homogènes*. Appliquons-leur les résultats de la discussion précédente :

1° $ab' - a'b \neq 0$, 1 solution et 1 seule : $x = 0$, $y = 0$.

2° $ab' - a'b = 0$, infinité de solutions, et l'on peut choisir arbitrairement la valeur d'une inconnue. D'après cela, pour qu'il y ait une solution autre que $x = 0$, $y = 0$, il faut et il suffit que $ab' - a'b$ soit nul.

72. Résolution d'un système de deux équations homogènes et du premier degré à trois inconnues.

Soit

$$(1) \qquad \begin{cases} ax + by + cz = 0, \\ a'x + b'y + c'z = 0 \end{cases}$$

le système proposé. Supposons d'abord les nombres $bc' - b'c$, $ca' - c'a$, $ab' - a'b$ non nuls simultanément. Pour fixer les idées, soit $ab' - a'b \neq 0$. Donnons à z une valeur arbitraire, et résolvons le système obtenu par rapport à x et y :

$$(ab' - a'b)x + (cb' - c'b)z = 0,$$
$$(ab' - a'b)y + (ac' - a'c)z = 0 ;$$

d'où

$$x = \frac{bc' - b'c}{ab' - a'b}z, \qquad y = \frac{ca' - c'a}{ab' - a'b}z.$$

Il suffit de donner à z une valeur quelconque et de calculer ensuite x et y au moyen de ces formules pour avoir une solu-

tion du système. On obtiendra ainsi toutes les solutions de ce système.

Nous allons mettre les expressions de x, y, z sous une forme plus symétrique. Posons $\frac{z}{ab'-a'b}=\lambda$, ou $z=(ab'-a'b)\lambda$; nous aurons

$$(2)\quad x=(bc'-b'c)\lambda,\quad y=(ca'-c'a)\lambda,\quad z=(ab'-a'b)\lambda\,;$$

quel que soit λ, ces formules fourniront une solution du système. Réciproquement, toute solution est de cette forme ; car considérons la solution

$$z=z_1,\qquad x=\frac{bc'-b'c}{ab'-a'b}z_1,\qquad y=\frac{ca'-c'a}{ab'-a'b}z_1\,;$$

il suffit, pour l'obtenir, de donner à λ, dans les formules (2), la valeur $\frac{z_1}{ab'-a'b}$.

Ainsi, lorsque les nombres $bc'-b'c$, $ca'-c'a$, $ab'-a'b$ ne sont pas tous les trois nuls, le système (1) a une infinité de solutions données par les formules (2) où l'on prend pour λ un nombre quelconque. Parmi ces solutions, il y en a une (celle qui correspond à $\lambda=0$) où les trois inconnues sont nulles. On écrit souvent les formules (2) ainsi qu'il suit :

$$\frac{x}{bc'-b'c}=\frac{y}{ca'-c'a}=\frac{z}{ab'-a'b}\,;$$

il faut entendre que chaque numérateur est égal au dénominateur correspondant multiplié par un nombre arbitraire λ.

Supposons maintenant nuls les trois nombres $bc'-b'c$, $ca'-c'a$, $ab'-a'b$. a et a' ne sont pas nuls simultanément ; soit $a\neq 0$. X et Y étant les premiers membres des deux équations (1), on a l'identité

$$a'\mathrm{X}-a\mathrm{Y}\equiv 0\qquad\text{ou}\qquad \mathrm{Y}\equiv\frac{a'}{a}\mathrm{X}.$$

Il suffit donc de résoudre $\mathrm{X}=0$. On en tire $x=-\frac{by+cz}{a}$.

Donc il y a une infinité de solutions, et les inconnues y et z sont arbitraires.

EXERCICES

1. Résoudre les systèmes

$$\left\{\begin{aligned} \frac{a}{x}+\frac{b}{y}&=c,\\ \frac{a'}{x}+\frac{b'}{y}&=c'.\end{aligned}\right.$$

$\left(\text{On prend pour inconnues auxiliaires } x'=\frac{1}{x} \text{ et } y'=\frac{1}{y}\right)\cdot$

$$\left\{\begin{aligned} \lambda x-\mu y&=4,\\ 3x+5y&=1\ ;\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} ax+by+z&=0,\\ a'x+b'y+z&=0\ ;\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} &ax+by+cz+d=0,\\ &\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}\cdot\end{aligned}\right.$$

2. Soit le système

$$\left\{\begin{aligned} x(a+\mathrm{A})+y(b+\mathrm{B})+a^2+b^2+\mathrm{C}&=0,\\ x(a'+\mathrm{A})+y(b'+\mathrm{B})+a'^2+b'^2+\mathrm{C}&=0.\end{aligned}\right.$$

Montrer qu'à chaque couple de nombres a, b, on peut faire correspondre un couple de nombres a', b' tels que ce système ait une infinité de solutions.

3. Résoudre le système

$$\left\{\begin{aligned} bz-cy&=\alpha,\\ cx-az&=\beta,\\ ay-bx&=\gamma.\end{aligned}\right.$$

4. Résoudre les systèmes

$$\left\{\begin{aligned} \frac{x}{a}+\frac{z}{c}&=\lambda\left(1+\frac{y}{b}\right),\\ \frac{x}{a}-\frac{z}{c}&=\frac{1}{\lambda}\left(1-\frac{y}{b}\right),\\ \frac{x}{a}+\frac{z}{c}&=\lambda'\left(1+\frac{y}{b}\right),\\ \frac{x}{a}-\frac{z}{c}&=\frac{1}{\lambda'}\left(1-\frac{y}{b}\right)\ ;\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\lambda\left(1+\frac{y}{b}\right),\\ &\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\frac{1}{\lambda}\left(1-\frac{y}{b}\right),\end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\lambda'\left(1-\frac{y}{b}\right),\\ &\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\frac{1}{\lambda'}\left(1+\frac{y}{b}\right)\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{y+z}{a}=\frac{z+x}{b}=\frac{x+y}{c},\\ &\alpha yz+\beta zx+\gamma xy=xyz\ ;\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} yz&=a,\\ zx&=b,\\ xy&=c\ ;\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{xy}+\frac{1}{xz}=\frac{1}{a},\\ &\frac{1}{yx}+\frac{1}{yz}=\frac{1}{b},\\ &\frac{1}{zx}+\frac{1}{zy}=\frac{1}{c}.\end{aligned}\right.$$

III. — DÉTERMINANTS

73. Permutations paires et impaires. — Nous savons déjà ce qu'il faut entendre par *permutations* des n premiers nombres entiers : ce sont les différents groupes qu'on peut former en écrivant ces nombres les uns à la suite des autres dans tous les ordres possibles. Ainsi les permutations des deux premiers nombres entiers sont 12, 21 ; les permutations des trois premiers nombres entiers sont

$$\begin{array}{ll} 1\,2\,3, & 1\,3\,2,\\ 2\,3\,1, & 2\,1\,3,\\ 3\,1\,2, & 3\,2\,1.\end{array}$$

On dit que deux nombres d'une telle permutation présentent une *nversion* quand le plus grand de ces nombres est placé avant l'autre. Une permutation est dite *paire* quand elle a un nombre pair d'inversions ; *impaire*, si elle en a un nombre impair. La permutation $123\ldots n$, qui n'a aucune inversion, est regardée comme

paire. Ainsi les permutations 12, 123, 231, 312 sont paires, tandis que les permutations 21, 132, 213, 321 sont impaires.

Soit $abc\dots hkl$ une permutation des n premiers nombres entiers; formons le produit

$$\begin{aligned} \mathrm{P} = &(l-a)(l-b)(l-c)\dots(l-h)(l-k) \\ &(k-a)(k-b)(k-c)\dots(k-h) \\ &\dots\dots\dots\dots \\ &(c-a)(c-b) \\ &(b-a). \end{aligned}$$

Le nombre des inversions de la permutation considérée est égal au nombre des facteurs négatifs de ce produit : suivant donc que ce produit sera positif ou négatif, la permutation sera paire ou impaire.

Théorème. — *Quand on échange deux nombres d'une permutation des n premiers nombres entiers, la permutation change de classe.*

Soit

$$(1) \qquad abc\dots i\alpha\beta\gamma j\dots hkl$$

une permutation des n premiers nombres, et soit

$$(2) \qquad abc\dots j\alpha\beta\gamma i\dots hkl$$

la permutation déduite de (1) par l'échange des nombres i et j. Pour montrer que (1) et (2) sont de classes différentes, il suffit de faire voir que le produit P et le produit P′ déduit de P par l'échange des nombres i, j, produits qui ont évidemment la même valeur absolue, ont des signes contraires.

Mettons P sous la forme d'un produit de cinq facteurs de la manière suivante :

$$\Pi\times[(i-a)(j-a)(i-b)(j-b)\dots]\times[(\alpha-i)(j-\alpha)(\beta-i)(j-\beta)(\gamma-i)(j-\gamma)]$$
$$\times[\dots(k-i)(k-j)(l-i)(l-j)]\times(j-i),$$

Π désignant le produit des facteurs binomes qui ne renferment ni i ni j. Quand on échange les nombres i et j, les quatre premiers facteurs restent les mêmes, et le dernier facteur change de signe sans changer de valeur absolue : donc $\mathrm{P}' = -\mathrm{P}$.

Nous avons mis P sous la forme d'un produit de cinq facteurs ; le second facteur disparait lorsque i est le premier nombre de (1), le troisième disparaît lorsque i et j sont consécutifs, le quatrième disparaît lorsque j est le dernier nombre de (1).

On peut conclure du théorème précédent que, parmi les permutations des n premiers nombres entiers, il y en a autant de paires que d'impaires.

74. Définition d'un déterminant. — Considérons un tableau de n^2 nombres rangés sur n lignes horizontales et n colonnes verticales, de telle manière que chaque ligne et chaque colonne renferme n nombres. Numérotons les lignes horizontales, en descendant, au moyen des numéros $1, 2, \ldots, n$, et les colonnes verticales, en allant de gauche à droite, au moyen des mêmes numéros. Formons successivement tous les produits de n facteurs obtenus en prenant un nombre et un seul dans chaque ligne et dans chaque colonne. Soit

$$abc \ldots\ldots l$$

l'un de ces produits; soit

$$(1) \qquad \alpha, \beta, \gamma, \ldots\ldots, \lambda$$

les rangs des lignes et

$$(2) \qquad \alpha', \beta', \gamma', \ldots\ldots, \lambda'$$

les rangs des colonnes auxquelles appartiennent respectivement les facteurs du produit. Multiplions ce produit par $+1$ ou par -1, suivant que les permutations (1) et (2) sont de même classe ou de classes différentes. Enfin additionnons algébriquement tous ces nouveaux produits. La somme obtenue s'appelle le ***déterminant des n^2 nombres.*** Ces n^2 nombres sont les ***éléments***, les nouveaux produits sont les ***termes*** du déterminant. On dit que le déterminant est d'***ordre*** ou de ***degré n***. On représente un déterminant en plaçant entre deux barres verticales le tableau carré de ses éléments.

Si l'on désigne par le symbole $(\alpha\beta\gamma\ldots\ldots\lambda)$ le nombre $+1$ ou -1, suivant que la permutation $\alpha\beta\gamma\ldots\ldots\lambda$ est paire ou impaire, un terme quelconque T est de la forme

$$(\alpha\beta\gamma\ldots\ldots\lambda)(\alpha'\beta'\gamma'\ldots\ldots\lambda') \times abc\ldots\ldots l.$$

Pour justifier cette définition, il faut montrer que la valeur algébrique d'un terme est indépendante de l'ordre des éléments qui y figurent. Dans le terme T, échangeons, par exemple, les facteurs a et b; nous obtiendrons le terme T' que voici :

$$(\beta\alpha\gamma\ldots\ldots\lambda)(\beta'\alpha'\gamma'\ldots\ldots\lambda') \times bac\ldots\ldots l.$$

Les troisièmes facteurs des produits T et T' sont les mêmes, et les deux premiers facteurs de T' sont opposés aux deux premiers facteurs de T. On a donc bien $T = T'$.

D'après cela, on peut convenir de prendre, dans chaque terme, le premier élément dans la première colonne, le second dans la seconde, etc. C'est ce que nous appellerons ***procéder par colonnes.*** A la permutation $\alpha\beta\gamma\ldots\ldots\lambda$ des n premiers nombres entiers correspond le terme

$$(\alpha\beta\gamma\ldots\ldots\lambda)abc\ldots\ldots l,$$

a étant le $\alpha^{\text{ième}}$ élément de la première colonne, b le $\beta^{\text{ième}}$ élément

de la seconde colonne, etc. On voit qu'il y a autant de termes que de permutations des n premiers nombres.

Exemples :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b,$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = ab'c'' + a'b''c + a''bc' - ab''c' - a'bc'' - a''b'c.$$

Mais on peut aussi prendre le premier élément dans la première ligne, le second dans la seconde, etc. C'est ce que nous appellerons *procéder par lignes.* Alors à la permutation $\alpha'\beta'\gamma'\ldots\ldots\lambda'$ des n premiers nombres entiers correspond le terme

$$(\alpha'\beta'\gamma'\ldots\ldots\lambda')abc\ldots\ldots l,$$

a étant, cette fois, le $\alpha'^{ième}$ élément de la première ligne, b le $\beta'^{ième}$ élément de la seconde ligne, etc.

Qu'on procède par lignes ou par colonnes, à la permutation $123\ldots n$ correspond le produit des éléments situés sur la diagonale issue du sommet supérieur de gauche (*diagonale principale*) : c'est le *terme principal* du déterminant.

Si l'on remplace tous les éléments d'un déterminant d'ordre n par leurs opposés, on obtient un nouveau déterminant égal ou opposé au premier, suivant que n est pair ou impair. Enfin si, dans un déterminant, les éléments d'une ligne quelconque ou d'une colonne quelconque sont tous nuls, le déterminant est nul.

Propriétés élémentaires des déterminants.

75. *La valeur d'un déterminant ne change pas quand on prend les lignes pour colonnes et réciproquement.*

Soit Δ la valeur d'un déterminant, Δ' celle du déterminant obtenu en prenant pour lignes les colonnes de Δ et réciproquement. Pour démontrer que $\Delta = \Delta'$, nous allons faire voir que Δ et Δ' sont formés avec les mêmes termes. Calculons, en effet, Δ en procédant par lignes, et soit

$$(\alpha\beta\gamma\ldots\ldots\lambda)abc\ldots\ldots l$$

le terme de Δ correspondant à la permutation $\alpha\beta\gamma\ldots\ldots\lambda$: a est le $\alpha^{ième}$ élément de la première ligne de Δ, etc. D'autre part, calculons Δ' en procédant par colonnes : à la permutation $\alpha\beta\gamma\ldots\ldots\lambda$ correspond le terme

$$(\alpha\beta\gamma\ldots\ldots\lambda)a'b'c'\ldots\ldots l',$$

a' étant le $\alpha^{ième}$ élément de la première colonne de Δ', etc. Or les colonnes de Δ' sont les lignes de Δ : on a donc $a' = a$, $b' = b$, ..., $l' = l$. Les termes de Δ' sont donc les mêmes que ceux de Δ.

Ainsi, par exemple,

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}.$$

76. *Si, dans un déterminant Δ, on échange deux lignes* (ou deux colonnes), *on obtient un nouveau déterminant Δ' qui est égal à $-\Delta$.*

Échangeons dans Δ la $p^{ième}$ et la $q^{ième}$ ligne, et montrons que les termes de Δ' sont opposés à ceux de Δ. Calculons Δ en procédant par lignes. Écrivons le terme de Δ correspondant à la permutation

(1) $$\alpha\ldots\beta\ldots\gamma\ldots\lambda,$$

β et γ occupant dans cette permutation les rangs p et q. Soit

$$(\alpha\ldots\beta\ldots\gamma\ldots\lambda)a\ldots b\ldots c\ldots l$$

ce terme, a étant le $\alpha^{ième}$ élément de la première ligne de Δ, etc. Calculons Δ' en procédant également par lignes, et écrivons le terme de Δ' correspondant à la permutation

(2) $$\alpha\ldots\gamma\ldots\beta\ldots\lambda,$$

déduite de (1) par l'échange des nombres β et γ. Soit

$$(\alpha\ldots\gamma\ldots\beta\ldots\lambda)a'\ldots b'\ldots c'\ldots l'$$

ce terme, a' étant le $\alpha^{ième}$ élément de la première ligne de Δ', etc. Pour prouver que ces deux termes sont opposés, il suffit de faire voir que les deux produits de n facteurs

$$a\ldots b\ldots c\ldots l, \qquad a'\ldots b'\ldots c'\ldots l'$$

sont les mêmes. Or les facteurs du second produit, autres que b' et c', sont les mêmes que les facteurs de même rang du premier produit. Maintenant b' est égal à c, car b' est le $\gamma^{ième}$ élément de la $p^{ième}$ ligne de Δ', qui est la $q^{ième}$ ligne de Δ. De même c' est égal à b.

Ainsi, par exemple,

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c & b & a \\ c' & b' & a' \\ c'' & b'' & a'' \end{vmatrix}.$$

Il suit de là qu'*un déterminant Δ qui a deux lignes* (ou deux colonnes) *identiques est nul.* Car soit Δ' le déterminant obtenu en échangeant ces deux lignes (ou ces deux colonnes). Puisqu'elles sont identiques, Δ' est égal à Δ. Mais, d'autre part, Δ' est égal à $-\Delta$: donc on a $\Delta = -\Delta$, d'où $\Delta = 0$.

77. ***Un déterminant* Δ *est un polynome homogène et du premier degré par rapport aux éléments* $a, b, \ldots, f, \ldots, l$ *d'une ligne*** (ou d'une colonne) ***quelconque.***

En effet, d'après la définition, chaque terme renferme un élément et un seul de la ligne considérée. On peut donc écrire

$$\Delta = Aa + Bb + \cdots + Ff + \cdots + Ll,$$

A, B, ..., F, ..., L étant des sommes de produits de $n-1$ éléments ne renfermant aucune des lettres $a, b, \ldots, f, \ldots, l$. Mettre Δ sous cette forme, c'est ***développer* Δ *suivant les éléments de la ligne considérée.*** On peut de même développer Δ suivant les éléments d'une colonne quelconque. Supposons que f appartienne à la $\alpha^{\text{ième}}$ ligne et à la $\beta^{\text{ième}}$ colonne. Si l'on développe Δ suivant les éléments de la $\beta^{\text{ième}}$ colonne, le coefficient de f sera encore F, de sorte que, dans F, il n'y a aucun élément de la $\alpha^{\text{ième}}$ ligne ni de la $\beta^{\text{ième}}$ colonne. Nous donnerons bientôt une expression remarquable de F. Indiquons auparavant quelques conséquences importantes du théorème précédent.

Soit $a, b, \ldots, l$ les éléments d'une ligne (ou d'une colonne) quelconque d'un déterminant Δ. On a

$$\Delta = Aa + Bb + \cdots + Ll,$$

A, B, ..., L étant indépendants de $a, b, \ldots, l$. Si dans Δ on remplace $a, b, \ldots, l$ par $\lambda a, \lambda b, \ldots, \lambda l$, on obtient un nouveau déterminant

$$\Delta' = A.\lambda a + B.\lambda b + \cdots + L.\lambda l = \lambda\Delta.$$

On peut donc énoncer la proposition que voici :

Lorsqu'on multiplie par un même nombre* λ *tous les éléments d'une ligne (ou d'une colonne) ***d'un déterminant, le déterminant est multiplié par*** λ. On entend par là que le nouveau déterminant est égal à l'ancien multiplié par λ. Ainsi

$$\begin{vmatrix} \lambda a & b & c \\ \lambda a' & b' & c' \\ \lambda a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \lambda \times \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}.$$

De là et de ce fait qu'un déterminant qui a deux lignes (ou deux colonnes) identiques est nul, on conclut la proposition suivante :

Si, dans un déterminant, les éléments de deux lignes (ou de deux colonnes) ***sont proportionnels, le déterminant est nul.***

Ainsi, par exemple, le déterminant

$$\begin{vmatrix} \lambda a & b & a \\ \lambda a' & b' & a' \\ \lambda a'' & b'' & a'' \end{vmatrix}$$

est nul : en effet, il est égal au produit de λ par le déterminant

$$\begin{vmatrix} a & b & a \\ a' & b' & a' \\ a'' & b'' & a'' \end{vmatrix},$$

qui a deux colonnes identiques.

Reprenons encore la formule

$$\Delta = Aa + Bb + \dots + Ll,$$

et remplaçons-y $a, b, \dots, l$ par $\alpha' + \alpha'', \quad \beta' + \beta'', \dots, \lambda' + \lambda''$. Nous aurons

$$\Delta = (A\alpha' + B\beta' + \dots + L\lambda') + (A\alpha'' + B\beta'' + \dots + L\lambda'').$$

Or $A\alpha' + B\beta' + \dots + L\lambda'$ est la valeur du déterminant que l'on obtient en remplaçant dans Δ les éléments $a, b, \dots, l$ par $\alpha', \beta', \dots, \lambda'$; de même, $A\alpha'' + B\beta'' + \dots + L\lambda''$ est la valeur du déterminant qu'on obtient en remplaçant dans Δ les éléments $a, b, \dots, l$ par $\alpha'', \beta'', \dots, \lambda''$. On a donc ce théorème :

Lorsque, dans un déterminant, tous les éléments d'une ligne (ou d'une colonne) *sont des sommes de p termes, le déterminant est égal à la somme de p déterminants obtenus en remplaçant les éléments de la ligne ou de la colonne considérée successivement par les premiers, les seconds, ..., les $p^{\text{ièmes}}$ termes des sommes en question.*

Ainsi, par exemple,

$$\begin{vmatrix} \alpha' + \alpha'' & \beta' + \beta'' & \gamma' + \gamma'' \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha' & \beta' & \gamma' \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}.$$

En appliquant à la fois les deux propositions précédentes, on arrive à celle-ci :

On ne change pas la valeur d'un déterminant en ajoutant aux éléments d'une ligne (ou d'une colonne) *ceux des autres lignes* (ou colonnes) *multipliés préalablement par des facteurs quelconques.*

Ainsi, par exemple, quels que soient λ et μ, les deux déterminants

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} a + \lambda a' + \mu a'' & b + \lambda b' + \mu b'' & c + \lambda c' + \mu c'' \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

sont égaux. En effet, le second est égal à la somme des trois déterminants

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \lambda a' & \lambda b' & \lambda c' \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \mu a'' & \mu b'' & \mu c'' \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix},$$

dont les deux derniers sont nuls.

78. Calcul du coefficient d'un élément dans le développement d'un déterminant. — On appelle *mineur d'un déterminant d'ordre* n *correspondant à un élément* a le déterminant d'ordre $n-1$ obtenu en barrant la ligne et la colonne dont fait partie a.

Théorème. — *Dans un déterminant quelconque, le coefficient d'un élément* a *est égal au mineur correspondant multiplié par* $(-1)^{\alpha+\beta}$, α *étant le numéro de la ligne et* β *celui de la colonne dont fait partie* a.

Supposons d'abord que a soit le premier élément de la première ligne. Calculons le déterminant Δ en procédant par lignes. A toute permutation ne commençant pas par 1 correspond un terme ne contenant pas a. A la permutation

(1) $$1\beta\gamma\ldots\ldots\lambda$$

correspond le terme

$$(1\beta\gamma\ldots\ldots\lambda)abc\ldots\ldots l.$$

Soit Δ' le mineur de Δ correspondant à a. Calculons Δ' en procédant par lignes ; à la permutation

(2) $$\beta-1,\quad \gamma-1,\quad \ldots\ldots,\quad \lambda-1$$

des $n-1$ premiers nombres entiers correspond le terme

$$(\beta-1,\quad \gamma-1,\quad \ldots\ldots,\quad \lambda-1)bc\ldots\ldots l:$$

car la $k^{\text{ième}}$ ligne de Δ' est la $(k+1)^{\text{ième}}$ ligne de Δ dans laquelle on a supprimé le premier élément. D'ailleurs les permutations (1) et (2) ont le même nombre d'inversions : le terme considéré de Δ' peut donc s'écrire

$$(1\beta\gamma\ldots\ldots\lambda)bc\ldots\ldots l.$$

Ainsi le coefficient de a, dans un terme de Δ contenant a, est un terme de Δ'. Inversement, en multipliant par a un terme de Δ', on a un terme de Δ. Par conséquent, Δ' est le coefficient de a dans Δ.

Passons maintenant au cas général. Supposons que a appartienne à la $\alpha^{\text{ième}}$ ligne et à la $\beta^{\text{ième}}$ colonne. On amène la $\alpha^{\text{ième}}$ ligne au premier rang par $\alpha-1$ échanges de deux lignes (on l'échange avec la $(\alpha-1)^{\text{ième}}$, puis avec la $(\alpha-2)^{\text{ième}}$, ..., enfin avec la 1re), puis de même la $\beta^{\text{ième}}$ colonne au premier rang par $\beta-1$ échanges de deux colonnes. On obtient ainsi un déterminant

$$\Delta_1 = \Delta \times (-1)^{\alpha-1+\beta-1} = \Delta \times (-1)^{\alpha+\beta},$$

d'où

$$\Delta = \Delta_1 \times (-1)^{\alpha+\beta}.$$

Le coefficient de a dans Δ est donc égal au coefficient de a dans Δ_1, multiplié par $(-1)^{\alpha+\beta}$. Or, dans Δ_1, a est le premier élément de

la première ligne. Le coefficient de a dans Δ_1 est donc égal au mineur correspondant, et comme le mineur correspondant à a est le même dans Δ et dans Δ_1, grâce au soin que nous avons pris de respecter l'ordre des lignes autres que la $\alpha^{ième}$ et des colonnes autres que la $\beta^{ième}$, le théorème est démontré.

Ainsi le coefficient A d'un élément a de Δ est donné par la formule

$$A = (-1)^{\alpha+\beta}\Delta',$$

Δ' étant le mineur de Δ correspondant à a, α et β les numéros de la ligne et de la colonne dont fait partie a.

Le théorème qui précède ramène le calcul d'un déterminant d'ordre n au calcul de n déterminants d'ordre $n-1$; de même, le calcul de ceux-ci se ramène au calcul de déterminants d'ordre $n-2$, et ainsi de suite. On arrivera ainsi, de proche en proche, à n'avoir plus à développer que des déterminants du second ordre.

Exemple : Le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

peut se développer de six manières différentes :

$$\Delta = Aa + Bb + Cc, \qquad \Delta = Aa + A'a' + A''a'',$$
$$\Delta = A'a' + B'b' + C'c', \qquad \Delta = Bb + B'b' + B''b'',$$
$$\Delta = A''a'' + B''b'' + C''c'', \qquad \Delta = Cc + C'c' + C''c'',$$

avec

$$A = \begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} = b'c'' - b''c', \qquad B = -\begin{vmatrix} a' & c' \\ a'' & c'' \end{vmatrix} = c'a'' - c''a',$$

$$C = \begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix} = a'b'' - a''b',$$

$$A' = -\begin{vmatrix} b & c \\ b'' & c'' \end{vmatrix} = b''c - bc'', \qquad B' = \begin{vmatrix} a & c \\ a'' & c'' \end{vmatrix} = c''a - ca'',$$

$$C' = -\begin{vmatrix} a & b \\ a'' & b'' \end{vmatrix} = a''b - ab'',$$

$$A'' = \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} = bc' - b'c, \qquad B'' = -\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ca' - c'a,$$

$$C'' = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b.$$

Conséquences du théorème précédent. — 1° Si, dans un déterminant, tous les éléments d'une ligne ou d'une colonne sont

nuls, à l'exception d'un seul a, le déterminant est égal à a multiplié par le mineur correspondant et par $(-1)^{\alpha+\beta}$, α étant le numéro de la ligne et β celui de la colonne dont fait partie a.

2° Si les éléments situés d'un côté de la diagonale principale sont tous nuls, le déterminant se réduit à son terme principal. Ainsi, par exemple,

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ a' & b' & 0 & 0 \\ a'' & b'' & c'' & 0 \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} b' & 0 & 0 \\ b'' & c'' & 0 \\ b''' & c''' & d''' \end{vmatrix} = ab' \begin{vmatrix} c'' & 0 \\ c''' & d''' \end{vmatrix} = ab'c''d'''.$$

79. *Exercice.* — Considérons le déterminant (déterminant de Vandermonde)

$$\Delta = \begin{vmatrix} a^{n-1} & a^{n-2} & \dots & a & 1 \\ b^{n-1} & b^{n-2} & \dots & b & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ l^{n-1} & l^{n-2} & \dots & l & 1 \end{vmatrix},$$

où $a, b, \dots\dots, l$ sont n nombres différents. C'est un polynome en $a, b, \dots\dots, l$. Regardons-le comme un polynome en a ; son degré est $n-1$ (on s'en assure en le développant suivant les éléments de la première ligne) ; il s'annule pour $a = b$, $a = c$, ..., $a = l$: il est donc divisible par $(a-b)(a-c)\dots\dots(a-l)$, et le quotient est égal au coefficient de a^{n-1} dans Δ, c'est-à-dire à

$$\begin{vmatrix} b^{n-2} & b^{n-3} & \dots & b & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ l^{n-2} & l^{n-3} & \dots & l & 1 \end{vmatrix}.$$

En répétant le même raisonnement, on voit que Δ peut se mettre sous la forme remarquable que voici :

$$\begin{aligned} \Delta = (a-b)(a-c) & \;.\;.\;.\; (a-l) \\ (b-c) & \;.\;.\;.\; (b-l) \\ & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ & \qquad (k-l). \end{aligned}$$

On en conclut sur-le-champ que Δ est $\neq 0$.

EXERCICES

*1. On appelle déterminant ***symétrique*** tout déterminant dans lequel les éléments symétriquement placés par rapport à la diagonale principale sont égaux.

Le déterminant symétrique du troisième ordre

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b'' & b' \\ b'' & a' & b \\ b' & b & a'' \end{vmatrix}$$

n'a que six mineurs différents. Ecrire les coefficients A, A', A'', B, B', B'' de a, a', a'', b, b', b'' dans le développement de Δ. Ecrire le développement de Δ.

*2. On appelle déterminant ***symétrique gauche*** tout déterminant dans lequel les éléments situés sur la diagonale principale sont nuls, tandis que les éléments symétriquement placés par rapport à cette diagonale sont opposés.

Démontrer que tout déterminant symétrique gauche d'ordre impair est nul.

*3. Résoudre l'équation

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c''+x \end{vmatrix} = 0, \qquad ab' - a'b \neq 0.$$

*4. Le déterminant

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+r & b+r' & c+r'' \\ a+pr & b+pr' & c+pr'' \end{vmatrix}$$

est toujours nul.

*5. Démontrer l'égalité

$$\begin{vmatrix} \alpha & a & a' & 1 \\ \beta & b & b' & 1 \\ \gamma & c & c' & 1 \\ x^2+y^2 & x & y & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha - ax - a'y & a - x & a' - y \\ \beta - bx - b'y & b - x & b' - y \\ \gamma - cx - c'y & c - x & c' - y \end{vmatrix}.$$

*6. Remplacer un déterminant par un autre d'ordre supérieur.

*7. Un déterminant d'ordre $n+1$, dans lequel tous les éléments de la diagonale principale sont égaux à a et tous les autres éléments égaux à b, est égal à $(a+nb)(a-b)^n$.

*8. Vérifier l'identité

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} \equiv (x+y+z)(-x^2-y^2-z^2+yz+zx+xy).$$

En conclure l'identité suivante :

$$x^3+y^3+z^3-3xyz \equiv (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy).$$

*9. Soit

$$d = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}, \qquad \delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix},$$

$$D = \begin{vmatrix} a\alpha+b\beta+c\gamma & a\alpha'+b\beta'+c\gamma' & a\alpha''+b\beta''+c\gamma'' \\ a'\alpha+b'\beta+c'\gamma & a'\alpha'+b'\beta'+c'\gamma' & a'\alpha''+b'\beta''+c'\gamma'' \\ a''\alpha+b''\beta+c''\gamma & a''\alpha'+b''\beta'+c''\gamma' & a''\alpha''+b''\beta''+c''\gamma'' \end{vmatrix}.$$

Démontrer que D est égal au produit de d par δ.

*10. Si les éléments du déterminant

$$d = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c' \end{vmatrix}$$

sont liés par les relations

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2 &= 1, & aa+bb'+cc' &= 0, \\ a'^2+b'^2+c'^2 &= 1, & aa'+bb''+cc'' &= 0, \\ a''^2+b''^2+c''^2 &= 1, & a'a+b'b''+c'c'' &= 0, \end{aligned}$$

on a :

1° $d^2 = 1$;

2° $A = da$, $B = db$, $C = dc$, etc.

3°
$$\begin{aligned} a^2+a'^2+a''^2 &= 1, & ab+a'b'+a''b'' &= 0, \\ b^2+b'^2+b''^2 &= 1, & ac+a'c'+a''c'' &= 0, \\ c^2+c'^2+c''^2 &= 1, & bc+b'c'+b''c'' &= 0. \end{aligned}$$

*11. Soit X, Y, Z des polynomes homogènes et du premier degré en x, y, z ; si on y remplace x, y, z respectivement par

$$\begin{aligned} &ax'+by'+cz', \\ &a'x'+b'y'+c'z', \\ &a''x'+b''y'+c''z', \end{aligned}$$

on obtient des polynomes homogènes et du premier degré en x', y', z'. Démontrer que l'on a

$$\frac{D(X, Y, Z)}{D(x', y', z')} = \frac{D(X, Y, Z)}{D(x, y, z)} \times \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix},$$

$\dfrac{D(X, Y, Z)}{D(x, y, z)}$ désignant le déterminant formé par les coefficients des variables dans X, Y, Z, et $\dfrac{D(X, Y, Z)}{D(x', y', z')}$ désignant le déterminant formé par les coefficients des variables dans ce que deviennent X, Y, Z quand on y a remplacé x, y, z par leurs expressions en x', y', z'.

IV. — RÉSOLUTION D'UN SYSTÈME QUELCONQUE D'ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ

80. Résolution d'un système de trois équations du premier degré à trois inconnues.

Soit à résoudre le système

$$(1)\qquad \begin{cases} ax + by + cz + d = 0, \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0, \\ a''x + b''y + c''z + d'' = 0. \end{cases}$$

Appelons Δ le déterminant

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

formé par les coefficients des inconnues ; $A, B, C, A', B', C', A'', B'', C''$ les coefficients de $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$ dans Δ ; $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ ce que devient Δ quand on y remplace respectivement a, a', a'' ; b, b', b'' ; c, c', c'' par d, d', d'', en sorte que l'on a

$$\Delta_1 = Ad + A'd' + A''d'',$$
$$\Delta_2 = Bd + B'd' + B''d'',$$
$$\Delta_3 = Cd + C'd' + C''d''.$$

Cela posé, nous allons démontrer le théorème suivant :

Lorsque Δ n'est pas nul, le système (1) *a une solution et une seule. Lorsque Δ est nul, le système* (1) *n'a aucune solution si $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ ne sont pas nuls à la fois ; il en a une infinité si $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ sont nuls simultanément et si, de plus, les mineurs de Δ ne sont pas tous nuls.*

Pour cela, désignons par X, Y, Z les premiers membres des équations (1). On a l'identité

$$AX + A'Y + A''Z \equiv (Aa + A'a' + A''a'')x + (Ab + A'b' + A''b'')y + (Ac + A'c' + A''c'')z + \Delta_1.$$

Dans le second membre, le coefficient de x est Δ ; le coefficient de y est le déterminant Δ où l'on a remplacé a, a', a'' par b, b', b'',

c'est-à-dire 0; de même le coefficient de z est nul. Les combinaisons $BX + B'Y + B''Z$ et $CX + C'Y + C''Z$ donneraient lieu à des remarques analogues. On a donc les identités

$$(2)\qquad \begin{cases} AX + A'Y + A''Z \equiv \Delta x + \Delta_1, \\ BX + B'Y + B''Z \equiv \Delta y + \Delta_2, \\ CX + C'Y + C''Z \equiv \Delta z + \Delta_3. \end{cases}$$

Supposons $\Delta \neq 0$; toute solution de (1) vérifie le système

$$(3)\qquad \begin{cases} \Delta x + \Delta_1 = 0, \\ \Delta y + \Delta_2 = 0, \\ \Delta z + \Delta_3 = 0. \end{cases}$$

Or le système (3) admet une solution et une seule. Nous allons montrer qu'elle satisfait au système (1). Appelons en effet X', Y', Z' les premiers membres des équations (3). On a l'identité

$$aX' + bY' + cZ' \equiv \Delta(ax + by + cz) + (Aa + Bb + Cc)d + (A'a + B'b + C'c)d' + (A''a + B''b + C''c)d''.$$

Dans le second membre de cette identité, le coefficient de d est Δ; le coefficient de d' est le déterminant Δ où l'on a remplacé a', b', c' par a, b, c, c'est-à-dire 0; de même le coefficient de d'' est nul. Notre identité peut donc s'écrire

$$aX' + bY' + cZ' \equiv \Delta(ax + by + cz + d) \equiv \Delta X:$$

la solution du système (3) vérifie donc l'équation $\Delta X = 0$, et par suite l'équation $X = 0$, puisque Δ n'est pas nul. Elle vérifie de même les équations $Y = 0$, $Z = 0$.

Ainsi, lorsque Δ est $\neq 0$, le système (1) admet une solution et une seule, et les valeurs des inconnues qui composent cette solution sont données par les équations (3).

Supposons $\Delta = 0$. Si Δ_1, Δ_2, Δ_3 ne sont pas tous nuls, le système (1) n'a aucune solution. Soit par exemple $\Delta_3 \neq 0$; alors C, C', C'' ne peuvent pas être simultanément nuls; soit $C'' \neq 0$. La première identité (2) devient

$$CX + C'Y + C''Z \equiv \Delta_3,$$

d'où

$$Z \equiv -\frac{C}{C''}X - \frac{C'}{C''}Y + \frac{\Delta_3}{C''}, \qquad Z \equiv \lambda X + \mu Y + \nu, \qquad \nu \neq 0.$$

Ceci montre qu'un système de valeurs des inconnues annulant X et Y ne peut annuler Z.

Supposons à présent que Δ, Δ_1, Δ_2, Δ_3 soient nuls, sans que tous les mineurs de Δ le soient, et, pour fixer les idées, soit $C'' \neq 0$. L'identité

$$CX + C'Y + C''Z \equiv 0$$

peut s'écrire

$$Z \equiv \lambda X + \mu Y\,;$$

elle montre que la troisième équation (1) est une conséquence du système formé par les deux premières. Il suffit donc de résoudre le système

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0, \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0. \end{cases}$$

Or, C'' ou $ab' - a'b$ étant $\neq 0$, on peut attribuer à z une valeur arbitraire et résoudre ce système par rapport à x et y. Le système (1) a donc une infinité de solutions, et l'inconnue z est arbitraire. L'inconnue z est celle dont les coefficients ne figurent pas dans C''. Il est bon de remarquer que x et y sont de la forme

$$x = pz + q, \qquad y = p'z + q'.$$

Remarque. — Nous nous sommes appuyés uniquement sur les hypothèses $\Delta = 0$, $\Delta_3 = 0$, $C'' \neq 0$. Cela suffit pour que les équations (1) soient compatibles. Ces hypothèses doivent donc entraîner $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$. C'est ce qu'il est facile de vérifier. On a

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} d & b & c \\ d' & b' & c' \\ d'' & b'' & c'' \end{vmatrix}, \qquad C''\Delta_1 = \begin{vmatrix} d & b & c \\ d' & b' & c' \\ C''d'' & C''b'' & C''c'' \end{vmatrix}.$$

Aux éléments de la troisième ligne ajoutons ceux de la première multipliés par C et ceux de la seconde multipliés par C'; il vient

$$C''\Delta_1 = \begin{vmatrix} d & b & c \\ d' & b' & c' \\ Cd + C'd' + C''d'' & Cb + C'b' + C''b'' & Cc + C'c' + C''c'' \end{vmatrix}.$$

Actuellement, les éléments de la troisième ligne sont nuls : car le premier est Δ_3, le troisième est Δ, enfin le second est un déterminant qui a deux colonnes identiques. Donc $C''\Delta_1 = 0$, d'où $\Delta_1 = 0$. On démontrerait de même l'égalité $\Delta_2 = 0$.

Supposons enfin tous les mineurs de Δ nuls. Considérons les neuf nombres

$$(4) \qquad \begin{cases} ad' - a'd, & bd' - b'd, & cd' - c'd, \\ ad'' - a''d, & bd'' - b''d, & cd'' - c''d, \\ a'd'' - a''d', & b'd'' - b''d', & c'd'' - c''d'. \end{cases}$$

Ce sont les déterminants du second ordre formés par les coefficients d'une inconnue dans deux équations et par les termes connus correspondants. Si l'un des nombres (4) est différent de 0, les équations correspondantes sont incompatibles. Soit $ad' - a'd \neq 0$. Alors a et a' ne sont pas nuls à la fois. Soit $a \neq 0$. On a l'identité

$$-a'X + aY \equiv ad' - a'd,$$

d'où

$$Y \equiv \frac{a'}{a} X + \frac{ad' - a'd}{a}, \qquad Y \equiv \lambda X + \mu, \qquad \mu \neq 0.$$

Il est donc impossible qu'un système de valeurs de x, y, z annulant X annule aussi Y. Supposons nuls, ainsi que les mineurs de Δ, tous les nombres (4). Les nombres a, a', a'' ne sont pas tous nuls ; soit $a \neq 0$. Parmi les nombres (4), considérons ceux qui contiennent a, à savoir $ad' - a'd$, $ad'' - a''d$. Puisqu'ils sont nuls, on a les identités

$$-a'X + aY \equiv 0, \qquad -a''X + aZ \equiv 0;$$

on en tire

$$Y \equiv \frac{a'}{a} X, \qquad Z \equiv \frac{a''}{a} X;$$

il suit de là que les équations $Y = 0$, $Z = 0$ sont des conséquences de l'équation $X = 0$. Il suffit donc de résoudre l'équation

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Or, a étant différent de 0, on peut donner à y et à z des valeurs arbitraires, puis prendre pour x la valeur $-\frac{by + cz + d}{a}$. Le système (1) a donc une infinité de solutions, et les valeurs des inconnues y et z sont arbitraires.

Remarque. — On voit, par cette démonstration, qu'il suffit, pour que les équations soient compatibles, de supposer nuls : 1° parmi les mineurs de Δ, ceux, B', B'', C', C'', dont a est un élément, avec $a \neq 0$; 2° les deux déterminants $ad' - a'd$, $ad'' - a''d$. Il est facile de vérifier que, si les conditions contenues dans la première partie de cette remarque sont réalisées, les autres mineurs de Δ sont nuls. Dès lors la nullité des deux déterminants $ad' - a'd$, $ad'' - a''d$ entraîne celle des sept autres déterminants (4).

On observera encore que les deux déterminants $ad' - a'd$, $ad'' - a''d$ s'obtiennent en bordant a inférieurement par le coefficient de x pris successivement dans les deux dernières équations et à droite par les termes constants correspondants.

81. Résolution d'un système de n équations du premier degré à n inconnues.

Soit à résoudre le système

$$(1) \quad \begin{cases} X_1 \equiv a_1x_1 + b_1x_2 + \dots + l_1x_n + u_1 = 0, \\ X_2 \equiv a_2x_1 + b_2x_2 + \dots + l_2x_n + u_2 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ X_n \equiv a_nx_1 + b_nx_2 + \dots + l_nx_n + u_n = 0. \end{cases}$$

Appelons Δ le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \dots & l_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & l_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & \dots & l_n \end{vmatrix}$$

formé par les coefficients des inconnues; $A_1, B_1, \dots, L_1, A_2, \dots, L_n$ les coefficients de $a_1, b_1, \dots, l_1, a_2, \dots, l_n$ dans Δ ; Δ_k le déterminant obtenu en remplaçant dans Δ les éléments de la $k^{ième}$ colonne par $u_1, u_2, \dots, u_n$, de sorte que

$$\Delta_1 = A_1u_1 + A_2u_2 + \dots + A_nu_n,$$
$$\Delta_2 = B_1u_1 + B_2u_2 + \dots + B_nu_n,$$
$$\dots\dots\dots\dots,$$
$$\Delta_n = L_1u_1 + L_2u_2 + \dots + L_nu_n.$$

On a l'identité

$$A_1X_1 + A_2X_2 + \dots + A_nX_n \equiv (A_1a_1 + A_2a_2 + \dots + A_na_n)x_1$$
$$+ (A_1b_1 + A_2b_2 + \dots + A_nb_n)x_2 + \dots + (A_1l_1 + A_2l_2 + \dots + A_nl_n)x_n + \Delta_1.$$

Dans le second membre, le coefficient de x_1 est Δ ; celui de x_2 est Δ où l'on a remplacé $a_1, a_2, \dots, a_n$ par $b_1, b_2, \dots, b_n$, c'est-à-dire 0 ; de même, les coefficients de $x_3, \dots, x_n$ sont nuls. Des remarques analogues s'appliquent aux sommes

$$B_1X_1 + B_2X_2 + \dots + B_nX_n, \quad \dots, \qquad L_1X_1 + L_2X_2 + \dots + L_nX_n.$$

On a donc les identités

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_1X_1 + A_2X_2 + \dots + A_nX_n \equiv \Delta x_1 + \Delta_1, \\ B_1X_1 + B_2X_2 + \dots + B_nX_n \equiv \Delta x_2 + \Delta_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ L_1X_1 + L_2X_2 + \dots + L_nX_n \equiv \Delta x_n + \Delta_n. \end{array} \right.$$

Supposons d'abord $\Delta \neq 0$. Toute solution du système (1) vérifie le système

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta x_1 + \Delta_1 = 0, \\ \Delta x_2 + \Delta_2 = 0, \\ \dots\dots\dots, \\ \Delta x_n + \Delta_n = 0. \end{array} \right.$$

Or le système (3) a une solution et une seule. Nous allons montrer qu'elle satisfait au système (1). Appelons en effet $X'_1, X'_2, \dots, X'_n$ les premiers membres des équations (3). On a l'identité

$$a_1X'_1 + b_1X'_2 + \dots + l_1X'_n \equiv \Delta(a_1x_1 + b_1x_2 + \dots + l_1x_n)$$
$$+ (A_1a_1 + B_1b_1 + \dots + L_1l_1)u_1 + (A_2a_1 + B_2b_1 + \dots + L_2l_1)u_2 + \dots$$
$$+ (A_na_1 + B_nb_1 + \dots + L_nl_1)u_n.$$

Dans le second membre, le coefficient de u_1 est Δ ; le coefficient

de u_2 est Δ où l'on a remplacé $a_2, b_2, \ldots, l_2$ par $a_1, b_1, \ldots, l_1$, c'est-à-dire 0 ; de même, les coefficients de $u_3, \ldots, u_n$ sont nuls. L'identité se reduit donc à

$$a_1X'_1 + b_1X'_2 + \cdots + l_1X'_n \equiv \Delta(a_1x_1 + b_1x_2 + \cdots + l_1x_n + u_1) \equiv \Delta X_1.$$

La solution de (3) vérifie donc l'équation $\Delta X_1 = 0$, et par suite $X_1 = 0$. On verrait de même qu'elle satisfait à $X_2 = 0, \ldots, X_n = 0$.

On peut donc énoncer la proposition suivante, connue sous le nom de *règle de Cramer* :

Un système de n équations du premier degré à n inconnues, dans lequel le déterminant Δ formé par les coefficients des inconnues est différent de 0, admet une solution et une seule. De plus, la valeur de l'inconnue x_k est fournie par l'équation $\Delta x_k + \Delta_k = 0$, Δ_k étant ce que devient Δ quand on y remplace les coefficients de x_k par les termes connus correspondants.

Supposons maintenant que Δ soit nul, et que l'un des déterminants $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$, — Δ_n par exemple — soit $\neq 0$. Alors $L_1, L_2, \ldots, L_n$ ne sont pas tous nuls ; supposons $L_n \neq 0$. La première des identités (2) devient

$$L_1X_1 + L_2X_2 + \ldots + L_nX_n \equiv \Delta_n ;$$

on en tire

$$X_n \equiv -\frac{L_1}{L_n}X_1 - \frac{L_2}{L_n}X_2 - \ldots - \frac{L_{n-1}}{L_n}X_{n-1} + \frac{\Delta_n}{L_n},$$

$$X_n \equiv \lambda_1X_1 + \lambda_2X_2 + \ldots + \lambda_{n-1}X_{n-1} + \mu, \qquad \mu \neq 0.$$

Cette identité montre qu'il est impossible qu'un système de valeurs annulant $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$ annule aussi X_n : les équations (1) sont incompatibles.

Supposons enfin que les déterminants $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ soient nuls sans que tous les mineurs de Δ le soient, et, pour fixer les idées, soit $L_n \neq 0$. La dernière des identités (2) devient

$$L_1X_1 + L_2X_2 + \ldots + L_nX_n \equiv 0 ;$$

on en tire

$$X_n \equiv -\frac{L_1}{L_n}X_1 - \frac{L_2}{L_n}X_2 - \ldots - \frac{L_{n-1}}{L_n}X_{n-1}, \quad X_n \equiv \lambda_1X_1 + \lambda_2X_2 + \ldots + \lambda_{n-1}X_{n-1}.$$

On voit que la $n^{ième}$ équation (1) est une conséquence du système formé par les $n-1$ premières. D'ailleurs L_n est le déterminant formé par les coefficients de $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ dans les $n-1$ premières équations. Le système formé par ces $n-1$ premières équations, et par suite le système (1), admet donc une infinité de solutions : on peut choisir arbitrairement l'inconnue x_n dont les coefficients ne figurent pas dans L_n ; quant aux inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, elles s'exprimeront par des polynomes du premier degré en x_n.

Remarque. — Il suffit, dans la démonstration, de supposer nul, ainsi que Δ, le déterminant formé en bordant L_n en bas par les coefficients de $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ dans la $n^{ième}$ équation et à droite par les termes connus $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

82. Nous n'examinerons pas le cas où tous les mineurs de Δ seraient nuls, parce que nous démontrerons bientôt, à l'égard d'un système de n équations à p inconnues, deux théorèmes généraux qui comprennent tous les cas particuliers qui peuvent se présenter. Appliquons auparavant la règle de Cramer à la résolution du problème suivant :

Considérons un système de trois équations du premier degré à trois inconnues :

$$(1) \quad \begin{cases} ax + by + cz + d = 0, \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0, \\ a''x + b''y + c''z + d'' = 0, \end{cases} \qquad \text{avec} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \neq 0.$$

Ce système a une solution et une seule (x', y', z'). Proposons-nous de calculer la valeur V' du polynome $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta$ pour $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$.

A cet effet, considérons le système formé par les équations (1) et par l'équation

$$(2) \qquad \alpha x + \beta y + \gamma z - V + \delta = 0.$$

Ce système, dans lequel les inconnues sont x, y, z, V, admet une solution unique : car le déterminant des coefficients des inconnues est

$$\begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ a' & b' & c' & 0 \\ a'' & b'' & c'' & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma & -1 \end{vmatrix} = -\Delta.$$

Au reste, il est évident *a priori* que l'unique solution de ce système est (x', y', z', V'). On a, en appliquant la règle de Cramer :

$$\begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ a' & b' & c' & 0 \\ a'' & b'' & c'' & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma & -1 \end{vmatrix} V' + \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix} = 0,$$

d'où

$$V' \times \Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix}.$$

Pour que V' soit nul, il faut et il suffit que l'on ait

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix} = 0.$$

Donc, si l'on veut écrire que la solution du système (1) satisfait à l'équation

$$(4) \qquad \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0,$$

on écrira que le déterminant formé par les coefficients des inconnues et par les termes connus dans les équations (1) et (4) est nul.

83. Résolution d'un système de n équations du premier degré à p inconnues.

Soit à résoudre le système

$$(1) \quad \begin{cases} X_1 \equiv a_1x_1 + b_1x_2 + \dots + l_1x_p + u_1 = 0, \\ X_2 \equiv a_2x_1 + b_2x_2 + \dots + l_2x_p + u_2 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ X_n \equiv a_nx_1 + b_nx_2 + \dots + l_nx_p + u_n = 0. \end{cases}$$

Soit (T) le tableau formé par coefficients des inconnues :

$$(T) \qquad \begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & \dots & l_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & l_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & \dots & l_n \end{Vmatrix}.$$

Nous appellerons *déterminants déduits de* (T) tous ceux qu'on obtient en prenant les éléments communs à un certain nombre de lignes et au même nombre de colonnes. Parmi ces déterminants, il y en a au moins un qui est différent de zéro, et tel que tout autre déterminant différent de zéro déduit de (T) ait un degré inférieur ou égal. Soit d un tel déterminant. Nous l'appellerons *déterminant principal* du système et nous désignerons son degré par r. On a $r \leqslant n$, $r \leqslant p$.

Examinons d'abord le cas particulier où r est égal à n. Supposons que les inconnues dont les coefficients entrent dans d soient $x_1, x_2, \dots, x_n$. Si n est égal à p, il y a une solution unique ; si n est inférieur à p, il y a une infinité de solutions, et l'on peut choisir arbitrairement les valeurs de $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_p$. Ainsi, pour $r = n$, les équations (1) sont toujours compatibles.

Supposons $r < n$. Appelons δ l'ensemble des déterminants d'ordre $r+1$ formés par les coefficients de r inconnues dans $r+1$ équations et par les termes connus correspondants.

84. Théorème I. — *Si l'un des déterminants δ est différent de zéro, les équations* (1) *sont incompatibles.*

Plaçons les inconnues et les équations dans un ordre tel que le déterminant δ que nous supposons différent de zéro renferme les coefficients des r premières inconnues dans les $r+1$ premières équations. Soit δ_1 ce déterminant :

$$\delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \dots & f_1 & u_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & f_2 & u_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_r & b_r & \dots & f_r & u_r \\ a_{r+1} & b_{r+1} & \dots & f_{r+1} & u_{r+1} \end{vmatrix}.$$

Nous allons montrer que les $r+1$ premières équations sont incompatibles. Désignons à cet effet par $U_1, U_2, \dots, U_r, U_{r+1}$ les coefficients de $u_1, u_2, \dots, u_r, u_{r+1}$ dans δ_1, et considérons l'identité

$$\begin{aligned} U_1X_1 + U_2X_2 + \dots + U_rX_r + U_{r+1}X_{r+1} \\ \equiv (U_1a_1 + U_2a_2 + \dots + U_{r+1}a_{r+1})x_1 \\ + \dots + (U_1f_1 + U_2f_2 + \dots + U_{r+1}f_{r+1})x_r \\ + \dots + (U_1u_1 + U_2u_2 + \dots + U_{r+1}u_{r+1}). \end{aligned}$$

Dans le second membre, qui est un polynome du premier degré en $x_1, x_2, \dots, x_p$, le terme constant est δ_1 ; le coefficient de x_1 est δ_1 où l'on a remplacé $u_1, u_2, \dots, u_{r+1}$ par $a_1, a_2, \dots, a_{r+1}$, c'est-à-dire 0 ; de même les coefficients de $x_2, \dots, x_r$ sont nuls. Si r est $< p$, les coefficients de $x_{r+1}, \dots, x_p$ sont également nuls. Le coefficient de x_{r+1} par exemple, c'est δ_1 où l'on a remplacé $u_1, u_2, \dots, u_{r+1}$ par les coefficients $g_1, g_2, \dots, g_{r+1}$ de x_{r+1} dans les $r+1$ premières équations (1) ; c'est donc un déterminant d'ordre $r+1$ déduit du tableau (T) ; il est nul par hypothèse. Notre identité se réduit donc à la suivante :

$$U_1X_1 + U_2X_2 + \dots + U_rX_r + U_{r+1}X_{r+1} \equiv \delta_1.$$

Maintenant, δ_1 étant différent de zéro, il est impossible que $U_1, U_2, \dots, U_{r+1}$ soient tous nuls. Supposons $U_{r+1} \neq 0$. L'identité précédente peut s'écrire

$$X_{r+1} \equiv -\frac{U_1}{U_{r+1}}X_1 - \frac{U_2}{U_{r+1}}X_2 - \dots - \frac{U_r}{U_{r+1}}X_r + \frac{\delta_1}{U_{r+1}},$$

ou

$$X_{r+1} \equiv \lambda_1X_1 + \lambda_2X_2 + \dots + \lambda_rX_r + \mu, \qquad \text{avec} \qquad \mu \neq 0 :$$

il est donc impossible que des valeurs de $x_1, x_2, \dots, x_p$ annulant $X_1, X_2, \dots, X_r$ annulent aussi X_{r+1}. Les $r+1$ premières équations (1) sont incompatibles.

85. Théorème II. — *Si tous les déterminants* δ *sont nuls, les équations* (1) *sont compatibles.*

Le déterminant d contient les coefficients de r inconnues dans r des équations (1). Plaçons les inconnues et les équations dans un ordre tel que d soit formé avec les coefficients des r premières inconnues dans les r premières équations :

$$d = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \dots & f_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & f_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_r & b_r & \dots & f_r \end{vmatrix}.$$

Appelons maintenant δ_α (α étant l'un des nombres 1, 2, ..., $n - r$) le déterminant δ obtenu en bordant d inférieurement par les coefficients des r premières inconnues dans la $(r+\alpha)^{ième}$ équation et à droite par les termes connus $u_1, u_2, \dots, u_r, u_{r+\alpha}$:

$$\delta_\alpha = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \dots & f_1 & u_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & f_2 & u_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_r & b_r & \dots & f_r & u_r \\ a_{r+\alpha} & b_{r+\alpha} & \dots & f_{r+\alpha} & u_{r+\alpha} \end{vmatrix}.$$

Soit $U_1, U_2, \dots, U_r$ les coefficients de $u_1, u_2, \dots, u_r$ dans δ_α ; le coefficient de $u_{r+\alpha}$ est d. On établit, comme dans la démonstration précédente, l'identité

$$U_1X_1 + U_2X_2 + \dots + U_rX_r + dX_{r+\alpha} \equiv 0,$$

puisque δ_α est nul par hypothèse. On en tire

$$X_{r+\alpha} \equiv -\frac{U_1}{d}X_1 - \frac{U_2}{d}X_2 - \dots - \frac{U_r}{d}X_r,$$

ou

$$X_{r+\alpha} \equiv \lambda_1X_1 + \lambda_2X_2 + \dots + \lambda_rX_r.$$

L'équation $X_{r+\alpha} = 0$ est donc une conséquence du système formé par les équations $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, ..., $X_r = 0$. Dès lors, les $n - r$ dernières équations (1) sont des conséquences du système formé par les r premières, et il suffit de résoudre ce dernier système. Nous voilà donc ramenés au cas où l'ordre du déterminant principal est égal au nombre des équations. Si r est égal à p, il y a une solution unique. Si r est inférieur à p, il y a une infinité de solutions : $p - r$ inconnues sont arbitraires, à savoir celles dont les coefficients ne figurent pas dans d. Les autres inconnues s'expriment par des polynomes du premier degré par rapport aux inconnues arbitraires.

Remarques. — 1° On voit, par cette démonstration, qu'il suffit, pour que les équations soient compatibles : 1° de supposer nuls,

parmi les déterminants de degré $r+1$ déduits de (T), s'il y en a, ceux dont d est un mineur, avec $d \neq 0$; 2° de supposer nuls les $n-r$ déterminants $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{n-r}$. On peut démontrer que, si les conditions contenues dans la première partie de cette remarque sont réalisées, les autres déterminants de degré $r+1$ déduits de (T) sont tous nuls [1]. Dès lors, la nullité des $n-r$ déterminants $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{n-r}$ entraîne celle de tous les autres déterminants δ, car, si un seul de ces déterminants δ était $\neq 0$, le système serait incompatible, d'après le théorème I. M. Rouché a appelé *caractéristiques* ces $n-r$ déterminants.

2° Un système quelconque d'équations du premier degré a une solution unique, ou bien n'a aucune solution, ou bien a une infinité de solutions. Le premier cas ne se présente jamais lorsque le nombre des équations est plus petit que le nombre des inconnues : un tel système a une infinité de solutions ou n'en a aucune.

86. Équations homogènes. — Supposons $u_1 = u_2 = \cdots = u_n = 0$; alors les polynomes $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont homogènes, et les équations (1) sont dites *homogènes*. Un système d'équations homogènes et du premier degré a toujours au moins une solution, à savoir $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ..., $x_p = 0$, ce qui est évident de soi-même. Cela résulte aussi de ce que les déterminants δ, s'il y en a, sont tous nuls, puisque la dernière colonne de chacun d'eux est composée de zéros. Deux cas peuvent donc se présenter : ou bien le système a une solution unique, qui est alors $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ..., $x_p = 0$, ou bien il en a une infinité. Le premier cas a lieu lorsque r est égal à p, le deuxième cas a lieu lorsque r est inférieur à p. On peut, dans ce dernier cas, choisir à volonté $p-r$ inconnues, à savoir celles dont les coefficients ne figurent pas dans d. Les autres inconnues s'expriment par des polynomes homogènes et du premier degré par rapport aux premières. Nous résoudrons tout à l'heure le système pour $n = p - 1 = r$.

Lorsque le nombre n des équations est moindre que le nombre p des inconnues, le système n'a jamais une solution unique. On peut donc énoncer la proposition suivante : *Un système d'équations homogènes et du premier degré contenant plus d'inconnues que d'équations a une infinité de solutions, et l'on peut prendre arbitrairement la valeur de l'une au moins des inconnues.*

Un cas qui se présente fréquemment est celui où l'on a n équations homogènes et du premier degré à n inconnues. Si le déterminant formé par les coefficients des inconnues est différent de 0, le système n'a pas d'autre solution que la solution $x_1 = 0$,

[1] Voir, page 121, l'exercice 8.

$x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$. Si ce déterminant est nul, le système a une infinité de solutions, et on peut prendre à volonté la valeur de l'une au moins des inconnues. De là ce théorème : *Pour qu'un système de n équations homogènes et du premier degré à n inconnues ait une solution où les inconnues ne soient pas toutes nulles, il faut et il suffit que le déterminant formé par les coefficients des inconnues soit nul.*

Comme application de ce qui précède, cherchons à quelle condition n équations du premier degré à $n-1$ inconnues sont compatibles. Prenons par exemple le système

$$(3)\qquad \begin{cases} ax + by + c = 0, \\ a'x + b'y + c' = 0, \\ a''x + b''y + c'' = 0, \end{cases}$$

composé de trois équations à deux inconnues. Supposons qu'il admette la solution $x = x'$, $y = y'$; alors le système

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= 0, \\ a'x + b'y + c'z &= 0, \\ a''x + b''y + c''z &= 0, \end{aligned}$$

composé de trois équations homogènes et du premier degré aux trois inconnues x, y, z, admettra une solution autre que $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, savoir $x = x'$, $y = y'$, $z = 1$. Donc on a

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0.$$

Ainsi : *Pour que les équations* (3) *soient compatibles, il faut que le déterminant formé par les coefficients des polynomes qui composent leurs premiers membres soit nul.*

Lorsque cette condition est remplie, il n'est pas sûr que les équations (3) soient compatibles. Par exemple, les équations

$$\begin{aligned} x + y + 1 &= 0, \\ x + y + 2 &= 0, \\ x + y + 3 &= 0 \end{aligned}$$

sont incompatibles, et cependant le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

est nul. Toutefois, quand le déterminant principal du système (3) est du second ordre, la condition (4) exprime que les équations (3)

sont compatibles. Supposons par exemple $ab' - a'b \neq 0$; alors le système formé par les deux premières équations (3) admet une solution unique, et, à cause de l'égalité (4), cette solution satisfait à la troisième équation (3).

Résolvons, pour terminer, un système de n équations homogènes du premier degré à $n+1$ inconnues dans lequel le déterminant principal est d'ordre n. Soit par exemple le système

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} ax + by + cz + dt = 0, \\ a'x + b'y + c'z + d't = 0, \\ a''x + b''y + c''z + d''t = 0. \end{array} \right.$$

Appelons A, B, C, D les déterminants du troisième ordre obtenus en effaçant dans le tableau

$$\left\| \begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{array} \right\|$$

successivement la première, la deuxième, la troisième, la quatrième colonne. Soit $D \neq 0$. Résolvons les équations (5) par rapport à x, y, z en donnant à t une valeur arbitraire. Les inconnues sont données par les formules :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} dt & b & c \\ d't & b' & c' \\ d''t & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} a & dt & c \\ a' & d't & c' \\ a'' & d''t & c'' \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} z + \begin{vmatrix} a & b & dt \\ a' & b' & d't \\ a'' & b'' & d''t \end{vmatrix} = 0,$$

qu'on peut écrire

$$Dx + At = 0, \quad Dy - Bt = 0, \quad Dz + Ct = 0.$$

On en tire

$$x = -\frac{At}{D}, \quad y = \frac{Bt}{D}, \quad z = -\frac{Ct}{D},$$

ou bien, en posant $-\frac{t}{D} = \lambda$:

$$(6) \quad x = A\lambda, \qquad y = -B\lambda, \qquad z = C\lambda, \qquad t = -D\lambda,$$

formules qu'on écrit ordinairement ainsi :

$$\frac{x}{A} = \frac{y}{-B} = \frac{z}{C} = \frac{t}{-D}.$$

EXERCICES

1. Résoudre le système

$$\begin{cases} x - y + z = 0, \\ (a+b)x - (a+c)y + (b+c)z = 0, \\ abx - acy + bcz = 1. \end{cases}$$

2. Résoudre le système

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ ax + by + cz = d, \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2. \end{cases}$$

***3.** Résoudre le système

$$\begin{cases} ax + by + cz + t = 0, \\ a'x + b'y + c'z + t = 0, \\ a''x + b''y + c''z + t = 0, \end{cases}$$

les coefficients étant quelconques, mais tels cependant que e determinant

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

n'ait pas deux lignes identiques.

***4.** Résoudre le système

$$\begin{cases} a^n + a^{n-1}x_1 + a^{n-2}x_2 + \dots + ax_{n-1} + x_n = 0, \\ b^n + b^{n-1}x_1 + b^{n-2}x_2 + \dots + bx_{n-1} + x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ l^n + l^{n-1}x_1 + l^{n-2}x_2 + \dots + lx_{n-1} + x_n = 0, \end{cases}$$

$a, b, \dots, l$ étant n nombres différents. Montrer que $x_k = (-1)^k S_k$, S_k désignant la somme des produits k à k des nombres $a, b, \dots, l$. Calculer les déterminants déduits du tableau des coefficients en supprimant successivement la 2e, la 3e, ..., la $(n+1)$e colonne.

***5.** Trouver la formule d'interpolation de Lagrange comme application de la théorie des équations du premier degré.

Connaissant les restes que l'on obtient en divisant un polynome $f(x)$ par $x - a_1$, $x - a_2$, ..., $x - a_n$, ($a_1, a_2, \dots, a_n$ étant des nombres différents), calculer le reste de la division de $f(x)$ par $(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$.

*6. Soit

$$d = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \neq 0, \qquad D = \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix}.$$

Démontrer : 1° que $D = d^2$; 2° que le coefficient d'un élément quelconque de D est égal à l'élément correspondant de d multiplié par d. Ainsi, par exemple, $B'C'' - B''C' = ad$. Appliquer le dernier résultat au déterminant symétrique

$$\begin{vmatrix} a & b'' & b' \\ b'' & a' & b \\ b' & b & a'' \end{vmatrix}.$$

*7. Soit

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b'' & b' \\ b'' & a' & b \\ b' & b & a'' \end{vmatrix}$$ un déterminant égal à 0.

Le système d'équations

$$\begin{cases} ax + b''y + b'z = 0, \\ b''x + a'y + bz = 0, \\ b'x + by + a''z = 0 \end{cases}$$

admet une solution (x', y', z') où les inconnues ne sont pas toutes nulles. Démontrer que, si α, β, γ sont trois nombres assujettis seulement à la condition

$$\alpha x' + \beta y' + \gamma z' = 0,$$

on a

$$A\alpha + B''\beta + B'\gamma = 0,$$
$$B''\alpha + A'\beta + B\gamma = 0,$$
$$B'\alpha + B\beta + A''\gamma = 0.$$

Conclure de là que, si les mineurs de Δ ne sont pas tous nuls, il existe un nombre $k \neq 0$ tel que l'on ait

$A = kx'^2, \quad A' = ky'^2, \quad A'' = kz'^2, \quad B = ky'z', \quad B' = kz'x', \quad B'' = kx'y'.$

*8. Soit

$$(\text{T}) \quad \begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & \dots & l_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & l_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & b_n & \dots & l_n \end{Vmatrix}$$

un tableau rectangulaire contenant np nombres disposés sur n lignes horizontales et sur p colonnes verticales de façon que chaque ligne horizontale contienne p de ces nombres. On suppose que, parmi les déterminants d'ordre r $(r < n, \ r < p)$ déduits du tableau (T), il y en ait un, d, différent de 0, et tel que tous les déterminants d'ordre $r + 1$ déduits de (T) dont d est un mineur soient nuls. Si, par exemple, les lignes qui servent à former d sont les r premières, on demande de démontrer qu'à

chaque ligne $a_k, b_k, \dots, l_k$ du tableau (T) correspond un système de nombres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ tels qu'on ait les égalités

$$\begin{aligned} a_k &= \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_r a_r, \\ b_k &= \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_r b_r, \\ &\dots\dots\dots\dots, \\ l_k &= \lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2 + \dots + \lambda_r l_r ; \end{aligned}$$

conclure de là que tous les autres déterminants d'ordre $r+1$ déduits de (T) sont nuls.

CHAPITRE III

DU SECOND DEGRÉ

I. — ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

87. Résolution de l'équation du second degré à une inconnue. — Toute équation du second degré à une inconnue x peut être mise sous la forme

$$(1) \qquad ax^2 + bx + c = 0,$$

a, b, c désignant trois nombres quelconques, dont le premier, a, est toujours différent de zéro. Il est aisé de faire voir qu'une telle équation a 0, 1, ou 2 racines.

Considérons d'abord le cas particulier où c est nul sans que b le soit. Le premier membre de l'équation (1) est alors $x(ax+b)$; il s'annule pour $x=0$ et pour $x = -\frac{b}{a}$; pour toute autre valeur de x, il est différent de 0 : l'équation admet les racines 0, $-\frac{b}{a}\cdot$ Par exemple, l'équation $x^2 - x = 0$ admet les racines 0, 1; l'équation $3x^2 + 2x = 0$ admet les racines 0, $-\frac{2}{3}\cdot$

Considérons en second lieu le cas où b est nul sans que c le soit; le premier membre de l'équation (1) se réduit alors à $ax^2 + c$. Lorsque a et c sont de même signe, cette expression reste, pour toute valeur de x, de même signe que a et ne s'an-

nule jamais : l'équation n'a aucune racine; telle est, par exemple, l'équation $x^2+1=0$. Supposons a et c de signes contraires, et écrivons $ax^2+c \equiv a\left(x^2+\frac{c}{a}\right)$. Soit α le nombre $\sqrt{-\frac{c}{a}}$, de sorte que $-\frac{c}{a}=\alpha^2$; on aura

$$ax^2+c \equiv a(x^2-\alpha^2) \equiv a(x-\alpha)(x+\alpha).$$

L'expression ax^2+c s'annule donc pour $x=\alpha$ et pour $x=-\alpha$; pour toute autre valeur de x, elle est différente de zéro : l'équation proposée admet donc les racines $\sqrt{-\frac{c}{a}}$, $-\sqrt{-\frac{c}{a}}$. Par exemple, l'équation $x^2-1=0$ admet les racines $+1$, -1.

Enfin, lorsque b et c sont nuls à la fois, l'équation se réduit à $ax^2=0$, et admet la seule racine $x=0$.

Plaçons-nous maintenant dans le cas général où a, b, c sont tous trois différents de zéro. Désignons par $f(x)$ le *trinome du second degré* ax^2+bx+c. On a l'identité

$$(2) \qquad f(x) \equiv a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

Distinguons plusieurs cas.

1° $4ac-b^2>0$. Alors $f(x)$ reste, pour toute valeur de x, de même signe que a, et ne s'annule jamais : l'équation (1) n'a aucune racine.

2° $4ac-b^2=0$. Alors l'identité (2) se réduit à

$$(3) \qquad f(x) \equiv a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2;$$

pour toute valeur de x autre que $-\frac{b}{2a}$, $f(x)$ a le signe de a; pour $x=-\frac{b}{2a}$, $f(x)$ est nul : l'équation (1) admet l'unique racine $-\frac{b}{2a}$.

3° $4ac-b^2<0$. Désignons par α le nombre $\sqrt{b^2-4ac}$,

de sorte que $4ac - b^2 = -\alpha^2$. On a

$$f(x) \equiv a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\alpha^2}{4a} \equiv a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\alpha^2}{4a^2}\right]$$

$$\equiv a\left[x+\frac{b}{2a}-\frac{\alpha}{2a}\right]\left[x+\frac{b}{2a}+\frac{\alpha}{2a}\right],$$

ou enfin

(4) $$f(x) \equiv a(x-x')(x-x''),$$

avec $$x' = \frac{-b+\alpha}{2a}, \qquad x'' = \frac{-b-\alpha}{2a}.$$

Si l'on donne à x une valeur autre que x' ou x'', $f(x)$ est différent de zéro ; si cette valeur de x n'est pas comprise entre x' et x'', $f(x)$ a le signe de $+a$, tandis que, pour x compris entre x' et x'', $f(x)$ a le signe de $-a$. Pour $x = x'$ ou x'', $f(x)$ est nul : l'équation (1) admet donc, dans ce cas, deux racines données par la formule

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

En résumé, si l'on nomme *discriminant* du trinome $f(x)$ l'expression $4ac - b^2$, on peut énoncer l'important théorème que voici :

Théorème. — *Si le discriminant de $f(x)$ est positif, ce trinome ne s'annule jamais ; son signe pour toute valeur de x est celui de $+a$.*

Si le discriminant de $f(x)$ est nul, ce trinome s'annule pour une seule valeur de x, $-\frac{b}{2a}$; pour toute autre valeur de x, il a le signe de $+a$.

Si le discriminant de $f(x)$ est négatif, ce trinome s'annule pour deux valeurs de x, x' et x'' (on les appelle les *racines du trinome*) ; *pour toute valeur de x comprise entre ces deux valeurs, il a le signe de $-a$; pour toute valeur de x différente des valeurs x', x'' et non comprise entre elles, il a le signe de $+a$.*

Remarques. — 1° Toutes les fois que a et c sont de signes contraires, $4ac - b^2$ est négatif et l'équation $f(x) = 0$ a deux racines.

2° Lorsque $4ac - b^2 = 0$, l'équation $f(x) = 0$ n'a qu'une racine, $x' = -\frac{b}{2a}$. On dit cependant encore qu'elle a deux racines, mais que ces racines sont *égales*; ou bien on dit qu'elle a une *racine double*. Cette façon de parler est destinée à rappeler que $f(x)$ est alors, à un facteur numérique près, identique au *carré* de $x - x'$. Par opposition, lorsque le discriminant est négatif, on dit que l'équation $f(x) = 0$ admet deux racines *distinctes*.

3° Il arrive souvent que le coefficient b se présente sous la forme $2b'$; alors $4ac - b^2 = 4(ac - b'^2)$. Donc, pour $ac - b'^2 > 0$, l'équation $f(x) = 0$ n'a aucune racine; pour $ac - b'^2 = 0$, elle admet deux racines égales à $-\frac{b'}{a}$; pour $ac - b'^2 < 0$, elle admet deux racines distinctes données par la formule

$$\frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}.$$

En particulier, si $a = 1$, la formule précédente devient

$$-b' \pm \sqrt{b'^2 - c}.$$

88. Le théorème précédent conduit sur-le-champ aux deux propositions suivantes, dont on fait usage à chaque instant :

Corollaires. — 1° *Si, par un moyen quelconque, on a trouvé un nombre* α *tel que* $af(\alpha)$ *soit* < 0, *c'est une marque sûre que l'équation* $f(x) = 0$ *admet deux racines distinctes, et que le nombre* α *est compris entre ces racines.*

En effet, dans tout autre cas, on aurait $af(\alpha) \geqslant 0$.

2° *Si, par un moyen quelconque, on a trouvé deux nombres* α *et* β *tels que* $f(\alpha)f(\beta)$ *soit* < 0, *c'est une marque sûre que l'équation* $f(x) = 0$ *admet deux racines distinctes, et qu'il y a une de ces racines et une seule entre* α *et* β.

En effet, aucun des deux nombres $f(\alpha)$, $f(\beta)$ n'est nul; ces deux nombres sont de signes contraires : l'un d'eux, $f(\alpha)$ par exemple, a donc le signe de $-a$, tandis que $f(\beta)$ a le signe de $+a$. $f(\alpha)$ ayant le signe de $-a$, avant tout $f(x)$ admet

deux racines distinctes x', x'', et, de plus, α est compris entre ces racines ; quant au nombre β, il n'est pas compris entre elles, car sans cela $f(\beta)$ aurait le signe de $-a$: β est inférieur à la plus petite ou supérieur à la plus grande. Dans l'un et l'autre cas, il y a une racine et une seule entre α et β.

Applications. — 1° Supposons que $f(x)$ soit le polynome

$$(x-a)(x-b)-c^2 \qquad (a \leqslant b, \quad c \neq 0);$$

nous allons montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux racines distinctes. En effet, le coefficient de x^2 est positif, et $f(a)$ est négatif ainsi que $f(b)$. On voit de plus que a et b sont compris entre les racines, de sorte qu'en appelant x' la plus petite racine et x'' la plus grande, on a $x' < a \leqslant b < x''$. Pour qu'il y ait une racine double, il faut qu'on ait simultanément $a = b$, $c = 0$. Ces résultats se retrouvent aisément par la considération du discriminant. $f(x)$ ordonné s'écrit $x^2-(a+b)x+ab-c^2$; son discriminant est $4ab-4c^2-(a+b)^2 = -(a-b)^2-4c^2$; pour $c \neq 0$, il est négatif ; pour qu'il soit nul, il faut qu'on ait à la fois $a = b$, $c = 0$.

2° Montrer que l'équation

$$\frac{a^2}{x-p}+\frac{b^2}{x-q}+\lambda = 0, \qquad p < q, \qquad \lambda \neq 0$$

admet deux racines distinctes. Ecrivons l'équation ainsi :

$$\frac{a^2(x-q)+b^2(x-p)+\lambda(x-p)(x-q)}{(x-p)(x-q)} = 0 ;$$

elle équivaut à la suivante :

$$a^2(x-q)+b^2(x-p)+\lambda(x-p)(x-q) = 0,$$

dont nous désignerons le premier membre par $f(x)$. Or on a :

$$f(p) = a^2(p-q) < 0, \qquad f(q) = b^2(q-p) > 0 ;$$

on en conclut que l'équation $f(x) = 0$ admet deux racines distinctes x', x'' $(x' < x'')$, et que l'une de ces racines (et rien qu'une) tombe entre p et q. De sorte qu'on a

$$x' < p < x'' < q$$

ou

$$p < x' < q < x''.$$

Pour savoir lequel de ces deux cas se présente, il suffit d'avoir égard au signe du coefficient de x^2, c'est-à-dire au signe de λ. Si λ est > 0, c'est le premier cas qui se présente, et si λ est < 0, c'est le second.

89. Résolvons maintenant les deux importants problèmes que voici :

Premier problème. — *Ranger par ordre de grandeur les racines* (s'il y en a) *de l'équation* $ax^2 + bx + c = 0$ *et le nombre* α, *et cela sans résoudre l'équation.*

Soit $f(x)$ le premier membre de l'équation. On calcule le nombre $f(\alpha) = a\alpha^2 + b\alpha + c$. Si ce nombre a le signe de $-a$, c'est-à-dire si $af(\alpha)$ est < 0, l'équation $f(x) = 0$ admet deux racines distinctes, et le nombre α est compris entre ces racines. Si $f(\alpha)$ a le signe de $+a$, c'est-à-dire si $af(\alpha)$ est > 0, on ne connaît pas le signe du discriminant de $f(x)$. Supposons ce discriminant négatif : alors l'équation $f(x) = 0$ admet deux racines distinctes x', x'' $(x' < x'')$. Le nombre α n'est pas compris entre les racines, sinon $f(\alpha)$ aurait le signe de $-a$. On a $\alpha < x'$ ou $\alpha > x''$. Pour savoir lequel de ces deux cas se présente, il suffit de comparer α à un nombre quelconque compris entre x' et x''. $-\dfrac{b}{2a}$ est un tel nombre, car l'identité

$$f(x) \equiv a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

donne

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{4ac - b^2}{4a}, \qquad af\left(-\frac{b}{2a}\right) < 0.$$

D'ailleurs nous verrons plus loin, et on peut vérifier immédiatement, que l'on a

$$-\frac{b}{2a} = \frac{x' + x''}{2}.$$

Cela posé, si α est inférieur à $-\dfrac{b}{2a}$, il est inférieur à x' ; si α est supérieur à $-\dfrac{b}{2a}$, il est supérieur à x''.

Supposons que, dans un problème, l'inconnue x soit assujettie à vérifier : 1° l'équation $f(x) = 0$; 2° l'inéquation $x < \alpha$. Pour qu'il y ait une solution unique, il faut et il suffit qu'on ait $af(\alpha) < 0$; cette solution est x'. Pour qu'il y ait deux solutions, il faut et il suffit que l'on ait

$$4ac - b^2 < 0, \qquad af(\alpha) > 0, \qquad -\frac{b}{2a} < \alpha.$$

Application. — Indiquer le nombre des solutions de chacune des équations

$$P \pm \sqrt{Q} = 0,$$

où P est un polynome du premier degré, $ax + b$, et Q un polynome du second degré, $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$.

En prenant successivement le signe $+$, puis le signe $-$ devant le radical, on obtient les deux équations

$$\text{(I)} \qquad P + \sqrt{Q} = 0, \qquad \text{(II)} \quad P - \sqrt{Q} = 0.$$

Toute solution de l'une ou l'autre de ces équations satisfait à l'équation

$$(1) \qquad P^2 - Q = 0,$$

qui est du second degré. Si cette équation (1) n'a pas de racine, aucune des équations proposées n'en a. Supposons que l'équation (1) admette la racine x_1, et posons $ax_1 + b = P_1$, $\alpha x_1^2 + \beta x_1 + \gamma = Q_1$. On a $Q_1 = P_1^2$, et par suite Q_1 est positif; mais $\sqrt{Q_1}$ est égal à P_1 ou à $-P_1$, suivant que P_1 est positif ou négatif. Pour $P_1 < 0$, x_1 est racine de l'équation (I); pour $P_1 > 0$, x_1 est racine de l'équation (II). D'ailleurs le signe de P_1 dépend de la position de x_1 par rapport à $-\frac{b}{a}$. Donc, en supposant $a > 0$, nous avons les conclusions suivantes :

Si x_1 est $< -\frac{b}{a}$, x_1 est racine de l'équation (I); tandis que, si x_1 est $> -\frac{b}{a}$, x_1 est racine de l'équation (II).

On voit donc que, pour répondre à la question, il suffit de ranger par ordre de grandeur les racines de l'équation (1) et le nombre $-\frac{b}{a}$.

90. Deuxième problème. — *Ranger par ordre de grandeur les racines* (s'il y en a) *de l'équation* $ax^2+bx+c=0$ *et les deux nombres* α *et* β $(\alpha<\beta)$, *et cela sans résoudre l'équation.*

Soit toujours $f(x)$ le premier membre de l'équation. Calculons $f(\alpha)$ et $f(\beta)$, et distinguons deux cas, suivant que ces deux nombres sont de même signe ou de signes contraires.

Si d'abord ils sont de signes contraires, c'est-à-dire si $f(\alpha)f(\beta)$ est <0, l'équation admet deux racines distinctes x', x'' $(x'<x'')$, et il en tombe une et une seule entre α et β, de sorte qu'on a

$$\alpha<x'<\beta<x'' \qquad \text{ou} \qquad x'<\alpha<x''<\beta.$$

Le premier cas a lieu si $af(\alpha)$ est >0, le second a lieu si $af(\alpha)$ est <0. On peut dire encore qu'on a : dans le premier cas, $\alpha+\beta<x'+x''$ ou $-\frac{b}{a}$; dans le second cas, $\alpha+\beta>-\frac{b}{a}\cdot$ On a donc affaire au premier ou au second cas, selon que $\alpha+\beta$ est inférieur ou supérieur à $-\frac{b}{a}\cdot$

Supposons maintenant $f(\alpha)f(\beta)>0$; ce cas se subdivise lui-même en deux autres, suivant que $f(\alpha)$ a le signe de $+a$ ou celui de $-a$.

Si $af(\alpha)$ est <0, l'équation admet deux racines distinctes, et les nombres α et β sont tous deux compris entre ces racines.

Si $af(\alpha)$ est >0, il faut calculer le discriminant $4ac-b^2$. Supposons-le négatif; l'équation admet alors deux racines distinctes x', x'' $(x'<x'')$, et aucun des nombres α, β n'est compris entre ces racines. On a donc

$$x'<x''<\alpha<\beta,$$

ou

$$\alpha<x'<x''<\beta,$$

ou

$$\alpha<\beta<x'<x''.$$

Le premier cas a lieu pour $-\frac{b}{2a}<\alpha$, le second pour $\alpha<-\frac{b}{2a}<\beta$; le troisième pour $\beta<-\frac{b}{2a}\cdot$

On remarquera que l'inégalité $f(\alpha)f(\beta)>0$ implique

qu'entre α et β il y ait 0 ou deux racines de $f(x)$, la racine double, s'il y en a une, étant comptée pour deux.

Supposons que, dans un problème, l'inconnue x soit assujettie à vérifier: 1° l'équation $f(x) = 0$; 2° la double inéquation $\alpha < x < \beta$. Pour qu'il y ait une solution et une seule, il faut et il suffit que l'on ait $f(\alpha)f(\beta) < 0$. Cette solution est x' ou x'', selon que $af(\alpha)$ est positif ou négatif; ou bien encore, selon que $\alpha + \beta$ est inférieur ou supérieur à $-\frac{b}{a}\cdot$ Pour qu'il y ait deux solutions, il faut et il suffit qu'on ait à la fois :

$$4ac - b^2 < 0, \quad af(\alpha) > 0, \quad af(\beta) > 0, \quad \alpha < -\frac{b}{2a} < \beta.$$

Application. — Indiquer le nombre des solutions de chacune des équations

$$\pm\sqrt{P} \pm \sqrt{Q} = a,$$

où P et Q sont des polynomes du premier degré et a une constante, que l'on peut toujours supposer positive.

En combinant les signes placés devant les radicaux de toutes les manières possibles, on a quatre équations, parmi lesquelles se trouve la suivante :

$$-\sqrt{P} - \sqrt{Q} = a,$$

qui n'a aucune solution. Les trois autres sont :

$$\text{(I)} \qquad \sqrt{P} - \sqrt{Q} = a;$$

$$\text{(II)} \qquad \sqrt{P} + \sqrt{Q} = a;$$

$$\text{(III)} \qquad -\sqrt{P} + \sqrt{Q} = a.$$

Considérons l'équation (I), qui équivaut à

$$\sqrt{P} = a + \sqrt{Q}.$$

Toute solution de cette équation est solution de

$$P = a^2 + Q + 2a\sqrt{Q}$$

et par suite de

$$(1) \qquad (P - Q - a^2)^2 = 4a^2Q\ .$$

On verrait de même que toute solution de l'équation (II) ou de l'équation (III) est solution de (1); cela résulte d'ailleurs de

l'identité

$$(\sqrt{P}+\sqrt{Q}+a)(-\sqrt{P}+\sqrt{Q}+a)(\sqrt{P}-\sqrt{Q}+a)(-\sqrt{P}-\sqrt{Q}+a)$$
$$\equiv (P-Q-a^2)^2-4a^2Q.$$

L'équation (1) est du second degré au plus. Si elle n'a pas de racine, aucune des équations proposées n'en a. Supposons qu'elle admette la racine x_1. Appelons P_1 et Q_1 ce que deviennent P et Q quand on y remplace x par x_1. On a

$$(2) \qquad (P_1-Q_1-a^2)^2 = 4a^2Q_1,$$

ce qui montre que Q_1 est positif.

Cela posé, distinguons deux cas :

1° $P_1-Q_1-a^2>0$. Alors l'égalité (2) donne

$$P_1-Q_1-a^2 = 2a\sqrt{Q_1}, \qquad \text{ou} \qquad P_1=(a+\sqrt{Q_1})^2,$$

d'où l'on conclut que P_1 est positif et qu'on a

$$\sqrt{P_1}=a+\sqrt{Q_1} :$$

donc x_1 est racine de l'équation (I).

2° $P_1-Q_1-a^2<0$. Alors l'égalité (2) donne

$$(3) \qquad P_1-Q_1-a^2=-2a\sqrt{Q_1}, \qquad \text{ou} \qquad P_1=(a-\sqrt{Q_1})^2,$$

d'où l'on conclut que P_1 est positif et qu'on a

$$\sqrt{P_1}=\pm(a-\sqrt{Q_1}).$$

Pour choisir le signe dans le second membre de l'égalité prédédente, remplaçons-y $\sqrt{Q_1}$ par sa valeur tirée de l'égalité (3) ; nous aurons

$$\sqrt{P_1}=\pm\frac{P_1-Q_1+a^2}{2a}.$$

Par suite, si $P_1-Q_1+a^2$ est >0, x_1 est racine de l'équation (II) ; et si $P_1-Q_1+a^2$ est <0, x_1 est racine de l'équation (III).

En résumé, on a le tableau suivant :

$P_1-Q_1-a^2>0$; x_1 est racine de (I).

$P_1-Q_1-a^2<0$ $\begin{cases} P_1-Q_1+a^2>0, & x_1 \text{ est racine de (II)}; \\ P_1-Q_1+a^2<0, & x_1 \text{ est racine de (III)}. \end{cases}$

Nous avons dit que P et Q sont des polynomes du premier degré. Soit $P \equiv \alpha x + \beta$, $Q \equiv \gamma x + \delta$, et, pour fixer les idées, $\alpha > \gamma$. On a

$$P_1 - Q_1 - a^2 = (\alpha - \gamma)x_1 + \beta - \delta - a^2,$$
$$P_1 - Q_1 + a^2 = (\alpha - \gamma)x_1 + \beta - \delta + a^2,$$

de sorte que les signes de ces deux nombres dépendent de la position de x_1 par rapport aux deux nombres

$$A = \frac{\delta - \beta + a^2}{\alpha - \gamma}, \qquad B = \frac{\delta - \beta - a^2}{\alpha - \gamma} \qquad (B < A).$$

Pour $x_1 > A$, x_1 est racine de l'équation (I) ; pour $B < x_1 < A$, x_1 est racine de l'équation (II) ; pour $x_1 < B$, x_1 est racine de l'équation (III).

On voit donc que, pour répondre à la question, il suffit de ranger par ordre de grandeur les racines de l'équation (1) et les nombres B et A.

91. Inéquation du second degré. — Toute inéquation du second degré à une inconnue x peut se ramener à la forme

$$(1) \qquad ax^2 + bx + c > 0, \qquad a \neq 0.$$

Pour la résoudre, il faut se demander : 1° si le trinome $ax^2 + bx + c$ a des racines ; 2° quel est le signe de a.

Si ce trinome n'a aucune racine, l'inéquation (1) est vérifiée quel que soit x ou ne l'est jamais, suivant que a est positif ou négatif.

S'il a deux racines égales, l'inéquation est vérifiée, si a est positif, pour toute valeur de x, sauf pour $x = -\frac{b}{2a}$; elle n'est vérifiée pour aucune valeur de x si a est négatif.

Enfin si le trinome admet deux racines distinctes x', x'' $(x' < x'')$, l'inéquation est vérifiée pour $x < x'$ et pour $x > x''$ si a est positif, tandis que, si a est négatif, elle est vérifiée pour les valeurs de x comprises entre x' et x''.

L'inéquation

$$ax^2 + bx + c > a'x^2 + b'x + c'$$

se ramène à la précédente, car elle équivaut à

$$(a-a')x^2+(b-b')x+c-c'>0.$$

Il arrive souvent qu'une inéquation du second degré se présente sous la forme

$$(ax+b)(a'x+b')>0.$$

Il faut alors bien se garder de développer son premier membre. Ce premier membre est un trinome du second degré en x, qui admet les racines en évidence $-\frac{b}{a}$, $-\frac{b'}{a'}$, et dans lequel le coefficient de x^2 est aa'. Supposons $\frac{b}{a}\neq\frac{b'}{a'}$. L'inéquation est vérifiée par les valeurs de x non comprises entre $-\frac{b}{a}$ et $-\frac{b'}{a'}$ si aa' est positif, tandis que, si aa' est négatif, elle est vérifiée par les valeurs de x comprises entre $-\frac{b}{a}$ et $-\frac{b'}{a'}$.

L'inéquation

$$\frac{ax+b}{a'x+b'}>0$$

se ramène à la précédente, car elle équivaut à

$$(ax+b)(a'x+b')>0.$$

Il en est de même de l'inéquation

$$\frac{ax+b}{a'x+b'}>k,$$

qui équivaut à

$$\frac{(a-a'k)x+b-b'k}{a'x+b'}>0.$$

Considérons encore l'inéquation

$$\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}>0.$$

Elle équivaut à celle-ci :

$$(ax^2+bx+c)(a'x^2+b'x+c')>0.$$

Le premier membre est un produit de deux facteurs. Si aucun de ces facteurs n'a de racine, le premier facteur a toujours le signe de a, le second a toujours le signe de a' : l'inéquation sera donc toujours vérifiée ou ne le sera jamais, suivant que aa' sera positif ou négatif. Si, le premier facteur n'ayant aucune racine, le second en a, comme le premier facteur a toujours le signe de a, l'inéquation à résoudre est, en supposant $a > 0$, équivalente à

$$a'x^2 + b'x + c' > 0.$$

Si chacun des facteurs admet deux racines distinctes, on a

$$ax^2 + bx + c \equiv a(x - x_1)(x - x_2),$$

$$a'x^2 + b'x + c' \equiv a'(x - x'_1)(x - x'_2),$$

de sorte que l'inéquation à résoudre équivaut à celle-ci :

$$aa'(x - x_1)(x - x_2)(x - x'_1)(x - x'_2) > 0.$$

Le premier membre est un produit de facteurs dont il est aisé d'avoir les signes suivant la valeur de x.

Considérons, pour terminer, l'inéquation

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'} > k;$$

elle équivaut à

$$\frac{(a - a'k)x^2 + (b - b'k)x + c - c'k}{a'x^2 + b'x + c'} > 0,$$

qu'on sait résoudre.

Application. — Choisir le nombre λ de manière que l'inéquation

$$x^2 + 2x + \lambda > 10$$

ait pour solutions tous les nombres.

Nous voulons que l'inéquation

$$x^2 + 2x + \lambda - 10 > 0$$

soit vérifiée quel que soit x. Son premier membre est un trinome du second degré dans lequel le coefficient de x^2 est positif ; il faut et il suffit, pour que ce trinome soit toujours positif, que son discriminant soit positif :

$$\lambda - 10 - 1 > 0, \qquad \text{d'où} \qquad \lambda > 11.$$

92. Relations entre les coefficients et les racines d'une équation du second degré. — Considérons l'équation

$$(1) \qquad ax^2 + bx + c = 0, \qquad \text{avec} \qquad 4ac - b^2 \leqslant 0.$$

Cette équation admet deux racines x', x'', égales ou inégales, et telles qu'on ait identiquement

$$ax^2 + bx + c \equiv a(x - x')(x - x'') \equiv ax^2 - a(x' + x'')x + ax'x''.$$

On a donc $b = -a(x' + x'')$, $c = ax'x''$, d'où

$$(2) \qquad \begin{cases} x' + x'' = -\dfrac{b}{a}, \\ x'x'' = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

Ainsi, lorsqu'une équation du second degré admet des racines : 1° *la somme de ces racines est égale au quotient changé de signe du coefficient de x par le coefficient de x^2; 2° le produit de ces racines est égal au quotient du terme tout connu par le coefficient de x^2.* D'après cela, quand on connaît une des racines, il est très facile de calculer l'autre.

En particulier, si $a = 1$, c'est-à-dire si l'équation est

$$(3) \qquad x^2 + bx + c = 0, \qquad 4c - b^2 \leqslant 0,$$

les relations précédentes deviennent

$$(4) \qquad \begin{cases} x' + x'' = -b, \\ x'x'' = c. \end{cases}$$

Inversement, si deux nombres x', x'', égaux ou non, satisfont aux relations (4), on a identiquement

$$x^2 + bx + c \equiv x^2 - (x' + x'')x + x'x'' \equiv (x - x')(x - x'').$$

Ces deux nombres sont donc les racines de l'équation (3), et l'on peut énoncer la proposition suivante :

Pour que l'équation (3) *ait des racines et que ces racines soient les nombres x', x'', égaux ou non, il faut et il suffit que les coefficients de l'équation et les nombres x', x'' soient liés par les relations* (4).

Si, d'après cela, on demande de former un trinome de la

forme

$$x^2 + bx + c$$

admettant pour racines deux nombres donnés x', x'', l'unique solution du problème sera le trinome

$$x^2 - (x' + x'')x + x'x''.$$

Il y a une infinité d'équations du second degré admettant pour racines les nombres donnés ; ce sont les équations

$$\lambda[x^2 - (x' + x'')x + x'x''] = 0,$$

où λ est un nombre arbitraire différent de 0.

Considérons deux quelconques de ces équations :

$$\lambda[x^2 - (x' + x'')x + x'x''] = 0,$$
$$\mu[x^2 - (x' + x'')x + x'x''] = 0,$$

et soit $f(x)$ et $g(x)$ leurs premiers membres. On a l'identité

$$f(x) \equiv \frac{\lambda}{\mu} g(x).$$

Ainsi, quand deux équations du second degré ont les mêmes racines, leurs premiers membres sont des polynomes dont les coefficients sont proportionnels. La réciproque est évidente.

APPLICATIONS

93. *Calculer deux nombres x', x'' dont la somme s et le produit p soient donnés.* On doit avoir

$$(1) \qquad \begin{cases} x' + x'' = s, \\ x'x'' = p. \end{cases}$$

Si le problème est possible, l'équation du second degré

$$(2) \qquad x^2 - sx + p = 0$$

a des racines, et ces racines sont les nombres cherchés x', x''. Inversement, si cette équation a des racines, ces racines satisfont aux relations (1). Donc, pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que l'équation (2) ait des racines, et ces racines

sont les nombres cherchés. Ainsi l'unique condition de possibilité du problème est

$$4p - s^2 \leqslant 0.$$

Dans le cas particulier où $4p - s^2$ est égal à 0, et dans ce cas seulement, les racines de l'équation (2) sont égales, et leur valeur commune est $\frac{s}{2}$.

94. *Étant donné l'équation* $ax^2 + bx + c = 0$, *quelle relation doit-il y avoir entre* a, b, c *pour qu'elle admette deux racines* x', x'', *et que l'on ait*

$$mx' + nx'' = p,$$

m, n, p *étant des nombres donnés, et* m *étant différent de* n?

Si l'équation admet deux racines x', x'' remplissant la condition énoncée, le système

$$(1)\qquad \begin{cases} x + y = -\dfrac{b}{a}, \\ mx + ny = p \end{cases}$$

admet la solution unique $x = x'$, $y = x''$, et l'on a $x'x'' = \frac{c}{a}$. Réciproquement, si le produit des valeurs constituant la solution unique du système (1) est égal à $\frac{c}{a}$, avant tout, l'équation a des racines. Car soit x' la valeur de x, x'' la valeur de y; x', x'' sont les racines de l'équation $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$, qui équivaut à la proposée. En outre, on a $mx' + nx'' = p$. Il suffit donc, pour obtenir la relation demandée, de résoudre le système (1) et d'écrire que le produit des valeurs de x et de y est égal à $\frac{c}{a}$. En résolvant le système (1), on trouve

$$x = \frac{ap + bn}{a(m - n)}, \qquad y = -\frac{ap + bm}{a(m - n)}.$$

La condition cherchée est donc la suivante :

$$(ap + bm)(ap + bn) + ac(m - n)^2 = 0.$$

Elle s'applique même si les nombres m, n sont égaux, leur valeur commune étant $\neq 0$, et si, de plus, $4ac - b^2$ est $\leqslant 0$.

95. Discuter *a priori* les racines de l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

c'est-à-dire reconnaître, sans résoudre l'équation, si elle a des racines, et, dans le cas de l'affirmative, quels sont les signes de ces racines.

Si $\frac{c}{a}$ est < 0, l'équation a deux racines distinctes, l'une positive, l'autre négative.

Si $\frac{c}{a}$ est > 0, il y a trois cas à distinguer :

1° $4ac - b^2 > 0$; l'équation n'a aucune racine ;

2° $4ac - b^2 = 0$; l'équation a deux racines égales à $-\frac{b}{2a}$;

3° $4ac - b^2 < 0$; l'équation a deux racines distinctes et de même signe; ce signe est celui de leur somme, $-\frac{b}{a}$.

En résumé : pour que l'équation ait une racine positive et une racine négative, il faut et il suffit qu'on ait $\frac{c}{a} < 0$; pour qu'elle ait deux racines positives, il faut et il suffit qu'on ait

$$\frac{c}{a} > 0, \qquad 4ac - b^2 \leqslant 0, \qquad -\frac{b}{a} > 0;$$

pour qu'elle ait deux racines négatives, il faut et il suffit qu'on ait

$$\frac{c}{a} > 0, \qquad 4ac - b^2 \leqslant 0, \qquad -\frac{b}{a} < 0.$$

Exemple. — On donne l'équation

$$x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0,$$

λ pouvant prendre toutes les valeurs possibles. Discuter *a priori*, suivant la valeur de λ, les racines de cette équation.

Pour qu'il y ait une racine positive et une négative, il faut et

il suffit que l'on ait

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 < 0, \qquad \text{ou} \qquad -3 < \lambda < +1.$$

Pour qu'il y ait deux racines positives, il faut et il suffit qu'on ait

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 > 0, \qquad 2\lambda - 3 \leqslant 0, \qquad \lambda > 0,$$

ou
$$\lambda \leqslant \frac{3}{2}, \qquad \lambda > 0, \qquad \lambda > 1,$$

c'est-à-dire
$$1 < \lambda \leqslant \frac{3}{2}.$$

Enfin pour qu'il y ait deux racines négatives, il faut et il suffit qu'on ait

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 > 0, \qquad 2\lambda - 3 \leqslant 0, \qquad \lambda < 0,$$

ou
$$\lambda \leqslant \frac{3}{2}, \qquad \lambda < 0, \qquad \lambda < -3,$$

c'est-à-dire
$$\lambda < -3.$$

Voici un tableau qui résume la discussion. On y a rangé par ordre de grandeur croissante les valeurs remarquables de λ, et on a indiqué les signes des racines quand λ est compris entre deux valeurs consécutives :

λ		-3		$+1$		$+\frac{3}{2}$	
	2 racines négatives	1 r. = 0 1 r. = −6	1 rac. pos. 1 rac. nég.	1 r. = 2 1 r. = 0	2 racines positives	2 racines $= \frac{3}{2}$	aucune racine.

96. Somme des puissances semblables des racines d'une équation du second degré. — Soit

$$(1) \qquad ax^2 + bx + c = 0$$

une équation du second degré qui admet deux racines x', x''. On demande de calculer, sans résoudre l'équation, la somme

$$S_n = x'^n + x''^n,$$

n étant un entier positif quelconque.

On a

$$S_1 = x' + x'' = -\frac{b}{a},$$

$$S_2 = x'^2 + x''^2 = (x' + x'')^2 - 2x'x'' = \frac{b^2}{a^2} - 2\frac{c}{a} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}.$$

Si donc on avait une relation entre S_n, S_{n+1}, S_{n+2}, la question serait résolue. Or, considérons les égalités

$$ax'^2 + bx' + c = 0,$$
$$ax''^2 + bx'' + c = 0,$$

et additionnons-les après les avoir multipliées respectivement par x'^n, x''^n ; il vient

$$aS_{n+2} + bS_{n+1} + cS_n = 0.$$

Si, dans cette relation, on fait $n = 1$, comme on connait S_1 et S_2, elle donne S_3 ; si l'on y fait $n = 2$, comme on connait S_2 et S_3, elle donne S_4, etc.

$$n = 1 : aS_3 + b\frac{b^2 - 2ac}{a^2} - \frac{bc}{a} = 0, \text{ d'où } S_3 = \frac{3abc - b^3}{a^3}, \text{ etc.}$$

Remarques : 1° S_n est de la forme $\frac{\varphi_n(a, b, c)}{a^n}$, φ_n étant un polynome homogène et de degré n par rapport à a, b, c.

En effet, on vérifie cette proposition pour $n = 1, 2, 3$; supposons qu'elle soit vraie jusqu'à S_{n-1}, et démontrons qu'elle est encore vraie pour S_n. On a par hypothèse

$$S_{n-2} = \frac{\varphi_{n-2}(a, b, c)}{a^{n-2}}, \qquad S_{n-1} = \frac{\varphi_{n-1}(a, b, c)}{a^{n-1}},$$

φ_{n-2}, φ_{n-1} étant des polynomes homogènes en a, b, c et qui sont respectivement de degrés $n-2$, $n-1$. Calculons S_n. On a

$$aS_n + b\frac{\varphi_{n-1}}{a^{n-1}} + c\frac{\varphi_{n-2}}{a^{n-2}} = 0,$$

d'où

$$S_n = \frac{-b\varphi_{n-1} - ac\varphi_{n-2}}{a^n},$$

et l'on voit bien que le numérateur de la fraction qui représente S_n est un polynome homogène et de degré n en a, b, c.

2° Il est facile, c étant supposé $\neq 0$, de calculer la somme

$$\frac{1}{x'^n} + \frac{1}{x''^n}.$$

On a

$$\frac{1}{x'^n}+\frac{1}{x''^n}=\frac{x'^n+x''^n}{(x'x'')^n}=\frac{S_n}{(x'x'')^n}=S_n\frac{a^n}{c^n}=\frac{\varphi_n(a,\ b,\ c)}{c^n}.$$

Exemples :

$$\frac{1}{x'}+\frac{1}{x''}=-\frac{b}{c},$$

$$\frac{1}{x'^2}+\frac{1}{x''^2}=\frac{b^2-2ac}{c^2},$$

$$\frac{1}{x'^3}+\frac{1}{x''^3}=\frac{3abc-b^3}{c^3},\ \text{etc.}$$

Il est aisé d'expliquer pourquoi l'on peut calculer $x'^n+x''^n$ sans connaître x' et x'' : cela tient à ce que le polynome x^n+y^n peut se mettre sous la forme d'un polynome par rapport à xy et à $x+y$.

En effet, on a, pour les petites valeurs de n,

$$x^2+y^2\equiv(x+y)^2-2xy,$$

$$x^3+y^3\equiv(x+y)^3-3xy(x+y),$$

et l'identité

$$x^n+y^n\equiv(x^{n-1}+y^{n-1})(x+y)-xy(x^{n-2}+y^{n-2})$$

montre que si la proposition est vraie jusqu'à $x^{n-1}+y^{n-1}$, elle l'est, par cela même, pour x^n+y^n. Elle est donc générale.

Ainsi x^n+y^n peut se mettre sous la forme $F(xy,x+y)$, F étant un polynome. Dès lors on a

$$x'^n+x''^n=F\left(\frac{c}{a},\quad-\frac{b}{a}\right).$$

97. Définition. — On dit qu'un polynome en x et y, $f(x, y)$, est *symétrique* par rapport à ces deux lettres, quand on a l'identité

$$f(x,\ y)\equiv f(y,\ x).$$

Exemples : $x+y$, xy, x^2+y^2, xy^2+x^2y.

Dans un tel polynome, il y a deux sortes de termes : les uns renferment x et y à la même puissance et sont par conséquent symétriques en x et y : tel est le terme Ax^2y^2, qu'on peut écrire

$A(xy)^\alpha$. D'autres ne renferment pas x et y à la même puissance. Soit $Ax^\alpha y^\beta (\alpha < \beta)$ un tel terme; alors le polynome contient nécessairement le terme $Ax^\beta y^\alpha$, qui, ajouté au précédent, donne pour somme $A(xy)^\alpha(x^{\beta-\alpha} + y^{\beta-\alpha})$. Ainsi tout polynome symétrique en x et y peut se mettre sous la forme

$$(1) \qquad \Sigma A(xy)^\alpha + \Sigma B(xy)^\beta(x^\gamma + y^\gamma);$$

le premier signe Σ s'étend à tous les termes qui contiennent x et y à la même puissance, et le second à tous les couples de termes qui contiennent x et y à des puissances différentes.

Cela posé, il est très facile de calculer la valeur numérique que prend un tel polynome, $f(x, y)$, pour $x = x'$, $y = x''$, x' et x'' étant les racines d'une équation du second degré

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad (4ac - b^2 \leqslant 0),$$

et cela sans résoudre cette équation. On met le polynome sous la forme (1), et on a

$$f(x', x'') = \Sigma A(x'x'')^\alpha + \Sigma B(x'x'')^\beta(x'^\gamma + x''^\gamma).$$

Or $x'x''$ est égal à $\frac{c}{a}$, et on sait calculer $x'^\gamma + x''^\gamma$ sans connaitre x' et x''.

98. Application à la transformation de l'équation du second degré. — *Soit*

$$(1) \qquad ax^2 + bx + c = 0 \qquad (4ac - b^2 \leqslant 0)$$

une équation du second degré admettant deux racines, x' et x''. Soit $f(x)$, (gx) deux polynomes dont le second ne s'annule ni pour $x = x'$, ni pour $x = x''$. On demande de former une équation du second degré ayant pour racines

$$\frac{f(x')}{g(x')}, \qquad \frac{f(x'')}{g(x'')}.$$

C'est ce qu'on appelle faire la *transformation* $y = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Si l'on pose

$$s = \frac{f(x')}{g(x')} + \frac{f(x'')}{g(x'')} = \frac{f(x')g(x'') + f(x'')g(x')}{g(x')g(x'')},$$

$$p = \frac{f(x')}{g(x')} \cdot \frac{f(x'')}{g(x'')} = \frac{f(x')f(x'')}{g(x')g(x'')},$$

$\frac{f(x')}{g(x')}$ et $\frac{f(x'')}{g(x'')}$ sont les racines de l'équation

(2) $$x^2 - sx + p = 0.$$

Or s et p sont des fractions dont les termes sont des polynomes symétriques en x', x''. On sait donc les calculer sans résoudre l'équation (1). On fera ce calcul, et l'équation (2) répondra à la question.

Exemples : 1° *Former une équation du second degré ayant pour racines* x'^2, x''^2. On a ici

$$s = x'^2 + x''^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}, \qquad p = (x'x'')^2 = \frac{c^2}{a^2}.$$

x'^2 et x''^2 sont donc les racines de l'équation

(3) $$a^2x^2 - (b^2 - 2ac)x + c^2 = 0.$$

Le discriminant du premier membre est $b^2(4ac - b^2)$; il est nul : 1° quand $4ac - b^2 = 0$; 2° quand $b = 0$. Ce résultat était à prévoir, car l'égalité $x'^2 = x''^2$, ou $(x' - x'')(x' + x'') = 0$, a lieu quand $x' = x''$ ou quand $x' = -x''$.

2° *Former une équation du second degré ayant pour racines* kx', kx''. On a ici

$$s = k(x' + x'') = -\frac{kb}{a}, \qquad p = k^2x'x'' = \frac{k^2c}{a}.$$

kx' et kx'' sont donc les racines de l'équation

(4) $$ax^2 + kbx + k^2c = 0.$$

On l'obtient en remplaçant dans la proposée b et c par kb, k^2c.

Dans le cas particulier où k est égal à -1, l'équation (4) devient

$$ax^2 - bx + c = 0;$$

elle a pour racines $-x'$, $-x''$. On l'appelle la *transformée en* $-x$ de l'équation (1); elle ne diffère de cette dernière que par le changement de signe du coefficient du terme du premier degré.

3° *Former une équation du second degré ayant pour racines*

$\frac{1}{x'}$, $\frac{1}{x''}$, $(c \neq 0)$. On a, dans le cas actuel,

$$s = \frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} = -\frac{b}{c}, \qquad p = \frac{1}{x'x''} = \frac{a}{c}.$$

$\frac{1}{x'}$ et $\frac{1}{x''}$ sont les racines de l'équation

$$(5) \qquad cx^2 + bx + a = 0.$$

On l'appelle la *transformée en* $\frac{1}{x}$ de l'équation (1), dont elle se déduit par l'échange des coefficients extrêmes.

Les deux dernières transformations sont comprises dans la suivante :

$$y = \frac{\alpha x + \beta}{\alpha' x + \beta'},$$

que l'on appelle la *transformation homographique*. Proposons-nous d'effectuer cette transformation en nous plaçant d'abord dans l'hypothèse où x' est $\neq x''$. Nous supposerons $\alpha\beta' - \alpha'\beta \neq 0$, et, en outre, quand α' est $\neq 0$, que $-\frac{\beta'}{\alpha'}$ n'est pas racine de (1).

Soit y' une racine de la transformée ; soit x' la racine de la proposée à laquelle elle correspond. On a

$$y' = \frac{\alpha x' + \beta}{\alpha' x' + \beta'},$$

d'où
$$(\alpha' x' + \beta')y' = \alpha x' + \beta,$$

ou
$$(\alpha' y' - \alpha)x' + \beta' y' - \beta = 0.$$

Il est impossible que $\alpha' y' - \alpha$ soit nul, sans quoi $\beta' y' - \beta$ serait nul aussi, et on aurait $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 0$. On a donc

$$x' = \frac{\beta - \beta' y'}{\alpha' y' - \alpha},$$

et par suite

$$a\left(\frac{\beta - \beta' y'}{\alpha' y' - \alpha}\right)^2 + b\,\frac{\beta - \beta' y'}{\alpha' y' - \alpha} + c = 0.$$

y' vérifie donc l'équation

$$(6) \qquad a\left(\frac{\beta-\beta' y}{\alpha' y-\alpha}\right)^2+b\,\frac{\beta-\beta' y}{\alpha' y-\alpha}+c=0.$$

Pour la même raison, la seconde racine y'' de la transformée vérifie l'équation (6). Comme cette équation est du second degré en y, elle n'admet pas d'autres racines que y' et y'' : elle répond à la question. On l'obtient en résolvant, par rapport à x, l'équation

$$y=\frac{\alpha x+\beta}{\alpha' x+\beta'},$$

et en substituant la valeur trouvée pour x dans l'équation (1).

Le raisonnement précédent suppose $x' \neq x''$. Si l'on avait $x' = x''$, l'équation en y, formée d'après la règle que nous venons d'énoncer, admettrait une racine double

$$y'=\frac{\alpha x'+\beta}{\alpha' x'+\beta'}.$$

[on le voit en prenant (1) sous la forme $a(x-x')^2=0$] : donc, dans tous les cas, elle répond à la question.

Application. — *Former une équation du second degré ayant pour racines* $x'+h$, $x''+h$.

Il suffit de remplacer x par $y-h$ dans l'équation (1). On trouve ainsi l'équation

$$a(y-h)^2+b(y-h)+c=0,$$

ou

$$(7) \qquad ay^2+(b-2ah)y+ah^2-bh+c=0.$$

On peut disposer de h de manière à annuler, dans l'équation (7), soit le coefficient de y, soit le terme constant. Pour annuler le coefficient de y, il faut prendre $h=\frac{b}{2a}$; pour annuler le terme constant, il faut prendre pour h une racine de l'équation $ax^2-bx+c=0$; mais c'est la transformée en $-x$ de l'équation (1); il faut donc prendre $h=-x'$ ou $h=-x''$. Il était aisé de prévoir ces résultats : les racines de

l'équation (7) sont $x'+h$, $x''+h$; pour que le coefficient de y soit nul, il faut et il suffit que leur somme soit nulle, c'est-à-dire que $x'+x''+2h=0$, ou $-\frac{b}{a}+2h=0$, ou $h=\frac{b}{2a}$; pour que le terme constant soit nul, il faut et il suffit que l'un des deux nombres $x'+h$, $x''+h$ soit nul, c'est-à-dire que h soit égal à $-x'$ ou à $-x''$.

99. Reprenons l'équation du second degré

$$(1) \qquad ax^2+bx+c=0 \quad (4ac-b^2 \leqslant 0),$$

qui admet deux racines x', x''. Soit $f(x, y)$, $g(x, y)$ deux polynomes à deux variables x et y. Supposons $g(x', x'')$ et $g(x'', x')$ différents de zéro, et proposons-nous de former une équation du second degré dont les racines soient $\frac{f(x', x'')}{g(x', x'')}$, $\frac{f(x'', x')}{g(x'', x')}$.

Si l'on pose

$$s=\frac{f(x', x'')}{g(x', x'')}+\frac{f(x'', x')}{g(x'', x')}=\frac{f(x', x'')g(x'', x')+f(x'', x')g(x', x'')}{g(x', x'')g(x'', x')},$$

$$p=\frac{f(x', x'')f(x'', x')}{g(x', x'')g(x'', x')},$$

l'équation

$$x^2-sx+p=0$$

répond à la question. Or on peut calculer s et p sans résoudre l'équation (1) : car on est ramené à calculer les valeurs que prennent des polynomes symétriques en x et y pour $x=x'$, $y=x''$.

Exemple. — Former une équation du second degré ayant pour racines x'^2x'', x''^2x'. On a

$$s=x'x''(x'+x'')=-\frac{bc}{a^2}, \qquad p=(x'x'')^3=\frac{c^3}{a^3}.$$

L'équation

$$a^3x^2+abcx+c^3=0$$

répond donc à la question. Le discriminant de son premier

membre est $a^2c^2(4ac - b^2)$; il est nul 1° pour $4ac - b^2 = 0$; 2° pour $c = 0$. Ce résultat était à prévoir, car l'égalité $x'^2x'' = x''^2x'$ ou $x'x''(x' - x'') = 0$ a lieu pour $x' = x''$, ou quand l'un des nombres x', x'' est nul.

100. Condition pour que deux équations du second degré aient au moins une racine commune. — Soit

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad a'x^2 + b'x + c' = 0, \qquad (aa' \neq 0),$$

les deux équations proposées, dont nous représenterons les premiers membres par $f(x)$ et $\varphi(x)$. Quelle relation doit-il y avoir entre a, b, c, a', b', c', pour que ces deux équations aient au moins une racine commune ?

Supposons que ces deux équations aient des racines, c'est-à-dire que l'on ait $4ac - b^2 \leqslant 0$, $4a'c' - b'^2 \leqslant 0$, et que l'une des racines, x_1, de la première équation soit racine de la seconde. Alors le système

$$(1) \qquad \begin{cases} ay + bz + c = 0, \\ a'y + b'z + c' = 0, \end{cases}$$

où y et z sont les inconnues, admet la solution

$$y = x_1^2, \qquad z = x_1.$$

Or si $ab' - a'b$ est $\neq 0$, le système (1) admet la solution unique

$$y = \frac{bc' - b'c}{ab' - a'b}, \qquad z = \frac{ca' - c'a}{ab' - a'b}:$$

par suite on a

$$\frac{bc' - b'c}{ab' - a'b} = \left(\frac{ca' - c'a}{ab' - a'b}\right)^2, \qquad \text{ou} \qquad R = 0,$$

R désignant la quantité

$$(ab' - a'b)(bc' - b'c) - (ac' - a'c)^2.$$

Si maintenant $ab' - a'b = 0$, les équations (1) ne sont compatibles que si $ac' - a'c = 0$. Or elles sont compatibles, puisqu'elles admettent la solution $y = x_1^2$, $z = x_1$: donc, même dans ce cas, $R = 0$. Ainsi $R = 0$ est une condition *néces-*

saire pour que les deux équations aient une racine commune. Voyons si cette condition est suffisante.

Si l'on a $R = 0$, $ab' - a'b \neq 0$, le système (1) a une solution unique, et, dans cette solution, la valeur de y est le carré de la valeur de z. Soit $x_1 = \dfrac{ca' - c'a}{ab' - a'b}$ cette valeur de z : x_1 est une racine commune aux deux équations. Les deux équations ont donc une racine commune; d'ailleurs elles n'en ont qu'une, car sans cela on aurait $-\dfrac{b}{a} = -\dfrac{b'}{a'}$, ou $ab' - a'b = 0$. Remarquons en passant que les hypothèses $R = 0$, $ab' - a'b \neq 0$ entraînent $4ac - b^2 \leqslant 0$, $4a'c' - b'^2 \leqslant 0$, sans qu'on ait à la fois $4ac - b^2 = 0$, $4a'c' - b'^2 = 0$.

Pour calculer la racine commune, on considère les équations proposées comme des équations du premier degré en x^2 et en x, et on calcule la valeur de x.

Si l'on a $R = 0$, $ab' - a'b = 0$, on a par cela même $ac' - a'c = 0$. Dans ce cas, $\varphi(x)$ est identique à $f(x)$ multiplié par un facteur constant, car on a $b' = \dfrac{a'b}{a}$, $c' = \dfrac{a'c}{a}$, et par suite

$$\varphi(x) \equiv \frac{a'}{a}(ax^2 + bx + c), \qquad \text{ou} \qquad \varphi(x) \equiv \frac{a'}{a} f(x).$$

La seconde équation est alors équivalente à la première, et si l'on a $4ac - b^2 \leqslant 0$, les deux équations ont leurs deux racines communes.

Remarquons enfin que, si a est $= 0$, $a'b$ étant $\neq 0$, la condition $R = 0$ exprime que la racine unique de $f(x)$ est racine de $\varphi(x)$.

101. On peut montrer autrement que la condition $R = 0$ est nécessaire pour que les équations proposées aient au moins une racine commune.

Supposons toujours $4ac - b^2 \leqslant 0$, $4a'c' - b'^2 \leqslant 0$; appelons x_1 et x_2 les racines de $f(x)$, x'_1 et x'_2 celles de $\varphi(x)$. Si les deux équations ont une racine commune, on a

$$\varphi(x_1) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \varphi(x_2) = 0,$$

et par suite

$$\varphi(x_1)\varphi(x_2) = 0.$$

Or $\varphi(x_1)\varphi(x_2)$, c'est la valeur que prend le polynome $\varphi(x)\varphi(y)$, symétrique en x et y, pour $x = x_1$, $y = x_2$: on peut donc calculer $\varphi(x_1)\varphi(x_2)$ sans connaître x_1 et x_2. Faisons ce calcul. On a

$$\begin{aligned}\varphi(x_1)\varphi(x_2) &= (a'x_1^2 + b'x_1 + c')(a'x_2^2 + b'x_2 + c') \\ &= a'^2(x_1x_2)^2 + a'b'x_1x_2(x_1 + x_2) + b'^2x_1x_2 \\ &\quad + a'c'(x_1^2 + x_2^2) + b'c'(x_1 + x_2) + c'^2,\end{aligned}$$

d'où, en remplaçant x_1x_2 par $\frac{c}{a}$, $x_1 + x_2$ par $-\frac{b}{a}$, $x_1^2 + x_2^2$ par $\frac{b^2 - 2ac}{a^2}$,

$$\varphi(x_1)\varphi(x_2) = \frac{1}{a^2}\left[(ac' - a'c)^2 - (ab' - a'b)(bc' - b'c)\right] = \frac{-R}{a^2}.$$

Si donc les deux équations ont une racine commune, on a $R = 0$. Mais ce n'est pas tout : on conclut encore du calcul qui précède que, même dans le cas où les deux équations n'ont aucune racine commune, on a

$$R = -a^2\varphi(x_1)\varphi(x_2).$$

On démontrerait de même l'égalité

$$R = -a'^2 f(x_1')f(x_2').$$

Il est d'ailleurs facile de vérifier *a priori* l'égalité

$$a^2\varphi(x_1)\varphi(x_2) = a'^2 f(x_1')f(x_2')$$

en prenant $\varphi(x)$ sous la forme $a'(x - x_1')(x - x_2')$ et $f(x)$ sous la forme $a(x - x_1)(x - x_2)$.

162. Ces deux expressions de R nous seront utiles tout à l'heure. Nous allons en établir une troisième qu'il est bon de connaître.

Si les deux équations $f(x) = 0$, $\varphi(x) = 0$ ont une racine commune x_1, cette racine vérifie, quel que soit λ, l'équation $f + \lambda\varphi = 0$, ou

$$(a + \lambda a')x^2 + (b + \lambda b')x + c + \lambda c' = 0.$$

Par suite le discriminant de $f+\lambda\varphi$, à savoir

$$F(\lambda) = 4(a+\lambda a')(c+\lambda c') - (b+\lambda b')^2$$
$$= (4a'c' - b'^2)\lambda^2 + 2(2ac' + 2a'c - bb')\lambda + (4ac - b^2),$$

est, quel que soit λ, inférieur ou égal à 0. Cela posé, calculons λ de façon que la seconde racine de $f+\lambda\varphi$ soit égale à x_1. Il faudra résoudre l'équation

$$-\frac{b+\lambda b'}{a+\lambda a'} - x_1 = x_1,$$

ou

$$\lambda(b' + 2a'x_1) + b + 2ax_1 = 0.$$

Dans cette équation, le coefficient de λ est égal à $a'(x_1 - x'_2)$. Il est différent de 0 si x_1 est $\neq x'_2$, c'est-à-dire si $4a'c' - b'^2$ est < 0; de même, le terme indépendant de λ est différent de 0 si $4ac - b^2$ est < 0. Ceci dit, supposons $4a'c' - b'^2 < 0$; il y a alors une seule valeur de λ pour laquelle $f+\lambda\varphi$ a ses racines égales. Soit λ_1 cette valeur de λ. Pour $\lambda \neq \lambda_1$, $F(\lambda)$ est négatif; pour $\lambda = \lambda_1$, $F(\lambda)$ est nul. Donc le discriminant de $F(\lambda)$ considéré comme un trinome du second degré en λ est nul :

$$(4ac - b^2)(4a'c' - b'^2) - (2ac' + 2a'c - bb')^2 = 0.$$

Supposons $4a'c' - b'^2 = 0$, $4ac - b^2 < 0$; alors les deux racines de $f+\lambda\varphi$ sont toujours distinctes, et $F(\lambda)$ est toujours négatif. Cela exige que le coefficient de λ dans $F(\lambda)$ soit nul :

$$2ac' + 2a'c - bb' = 0.$$

Si enfin on a $4a'c' - b'^2 = 0$, $4ac - b^2 = 0$, les deux racines de $f+\lambda\varphi$ sont toujours égales et $F(\lambda)$ est nul identiquement : donc $2ac' + 2a'c - bb'$ est encore nul. Ainsi on a, dans tous les cas,

$$(4ac - b^2)(4a'c' - b'^2) - (2ac' + 2a'c - bb')^2 = 0.$$

On vérifie d'ailleurs sans peine que le premier membre de cette égalité n'est autre que $+4R$.

103. R s'appelle le ***résultant*** des deux trinomes $f(x)$, $\varphi(x)$. Nous avons vu ce qui arrive lorsqu'il est nul. Voyons ce qui se

passe lorsqu'il est différent de zéro (dans ce cas, les deux équations n'ont aucune racine commune).

Le cas le plus intéressant est celui où R est > 0. Montrons d'abord que, dans ce cas, les deux quantités $4ac - b^2$, $4a'c' - b'^2$ sont négatives. Pour cela, servons-nous de la dernière expression de R :

$$4R = (4ac - b^2)(4a'c' - b'^2) - (2ac' + 2a'c - bb')^2.$$

On voit immédiatement que, si R est positif, il est impossible que $4ac - b^2$, $4a'c' - b'^2$ soient de signes contraires ; il est impossible également que l'un de ces nombres soit nul. Il suffit donc de démontrer qu'ils ne peuvent pas être tous deux positifs. Admettons que l'on ait $4ac - b^2 > 0$, $4a'c' - b'^2 > 0$, et posons

$$\sqrt{4ac - b^2} = \alpha, \qquad \sqrt{4a'c' - b'^2} = \alpha' ;$$

on en déduit

$$c = \frac{b^2 + \alpha^2}{4a}, \qquad c' = \frac{b'^2 + \alpha'^2}{4a'},$$

d'où :

$$4R = \alpha^2\alpha'^2 - \left(a\frac{b'^2 + \alpha'^2}{2a'} + a'\frac{b^2 + \alpha^2}{2a} - bb'\right)^2,$$

$$\begin{aligned} 16a^2a'^2R &= 4a^2a'^2\alpha^2\alpha'^2 - [a^2(b'^2 + \alpha'^2) + a'^2(b^2 + \alpha^2) - 2aa'bb']^2, \\ &= -[(ab' - a'b)^2 + (a\alpha' - a'\alpha)^2][(ab' - a'b)^2 + (a\alpha' + a'\alpha)^2], \end{aligned}$$

et on voit que la valeur trouvée pour R ne serait pas positive. Ainsi l'inégalité $R > 0$ entraîne les inégalités $4ac - b^2 < 0$, $4a'c' - b'^2 < 0$.

Appelons x_1 et x_2 $(x_1 < x_2)$ les deux racines de $f(x)$, x'_1, x'_2 $(x'_1 < x'_2)$ les deux racines de $\varphi(x)$. L'égalité

$$R = -a^2\varphi(x_1)\varphi(x_2)$$

montre que $\varphi(x_1)\varphi(x_2)$ est < 0 : donc entre x_1 et x_2 il tombe une racine et une seule de $\varphi(x)$. On a par suite l'un ou l'autre des deux systèmes d'inégalités

$$x_1 < x'_1 < x_2 < x'_2, \qquad x'_1 < x_1 < x'_2 < x_2.$$

C'est le premier ou le second système qui convient, selon que

x_1+x_2 est inférieur ou supérieur à $x'_1+x'_2$, c'est-à-dire suivant que $\frac{b}{a}$ est supérieur ou inférieur à $\frac{b'}{a'}$.

Ainsi, *lorsque* R *est* >0, 1° *chaque équation admet deux racines distinctes*; 2° *les quatre racines, rangées par ordre de grandeur, appartiennent alternativement à l'une et à l'autre équation.*

Supposons maintenant $R<0$. Dans ce cas, on ne sait pas *a priori* quels sont les signes des discriminants $4ac-b^2$, $4a'c'-b'^2$. Supposons ces discriminants négatifs. On a, avec les mêmes notations que précédemment, $\varphi(x_1)\varphi(x_2)>0$, et x_1, x_2, x'_1, x'_2 vérifient l'un des quatre systèmes d'inégalités

$$x_1<x'_1<x'_2<x_2, \qquad x'_1<x_1<x_2<x'_2,$$
$$x_1<x_2<x'_1<x'_2, \qquad x'_1<x'_2<x_1<x_2.$$

Ainsi, entre les deux racines de chaque équation il y a 0 ou deux racines de l'autre.

104. Discussion de l'équation

$$ax^2+bx+c=m(a'x^2+b'x+c').$$

Posons-nous la question suivante : Quelles sont les valeurs que prend la fraction $\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$, $(a'\neq 0)$, lorsqu'on donne successivement à x toutes les valeurs possibles, et combien de fois prend-elle chacune d'elles ?

Pour y répondre, nous résoudrons l'équation

$$(1) \qquad \frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}=m,$$

et nous chercherons quel est, suivant la valeur de m, le nombre de ses racines. Or les racines de l'équation (1) sont celles de l'équation

$$(2) \qquad ax^2+bx+c-m(a'x^2+b'x+c')=0$$

qui n'annulent pas $a'x^2+b'x+c'$. D'ailleurs une racine de (2) qui annule $a'x^2+b'x+c'$ annule ax^2+bx+c. Supposons $R\neq 0$. Alors aucune racine de (2) n'annule $a'x^2+b'x+c'$,

et le nombre des racines de (2) est le nombre de fois que la fraction prend la valeur m.

L'équation (2) ordonnée s'écrit

$$(a - ma')x^2 + (b - mb')x + c - mc' = 0.$$

Pour qu'elle ait des racines, il faut et il suffit qu'on ait

$$\varphi(m) = 4(a - ma')(c - mc') - (b - mb')^2 \leqslant 0,$$

ou

$$(3) \qquad Am^2 + 2Bm + C \leqslant 0,$$

avec

$$A = 4a'c' - b'^2, \qquad B = -(2ac' + 2a'c - bb'), \qquad C = 4ac - b^2.$$

Pour résoudre l'inéquation (3), il faut se demander 1° si le trinome $Am^2 + 2Bm + C$ a des racines; 2° quel est le signe de A, c'est-à-dire de $4a'c' - b'^2$. Le discriminant du trinome $Am^2 + 2Bm + C$ est $4(AC - B^2) = 16R$.

Distinguons deux cas principaux : $R > 0$, $R < 0$.

1° $R > 0$. — Alors on sait que A est négatif. $AC - B^2$ étant positif, l'inéquation (3) est vérifiée quel que soit m. Donc, quel que soit m, l'équation (2) a deux racines distinctes : si l'on donne à x toutes les valeurs possibles, la fraction prend deux fois toutes les valeurs.

Il y a exception pour la valeur particulière $\frac{a}{a'}$. Pour cette valeur de m, l'équation (2) n'est plus du second degré : elle devient

$$\left(b - \frac{a}{a'} b'\right)x + c - \frac{a}{a'} c' = 0;$$

d'ailleurs le coefficient de x n'est pas nul, sans quoi on aurait $ab' - a'b = 0$, d'où $R = -(ac' - a'c)^2$, et R ne serait pas positif. Donc la fraction prend une fois et une seule la valeur $\frac{a}{a'}$.

2° $R < 0$. — Ce cas se subdivise en trois autres, car A peut être positif, négatif ou nul.

$A > 0$. — Soit m', m'' $(m' < m'')$ les racines du trinome

$Am^2+2Bm+C$. Les valeurs de m satisfaisant à l'inéquation (3) sont les valeurs comprises entre m' et m''. Pour $m=m'$ ou $m=m''$, on a $Am^2+2Bm+C=0$. Ainsi, pour $m'<m<m''$, l'équation (2) a deux racines distinctes; pour $m<m'$ ou $m>m''$, elle n'a aucune racine; enfin pour $m=m'$ ou $m=m''$, elle a deux racines égales. Si donc on attribue à x toutes les valeurs possibles, la fraction prend deux fois chaque valeur comprise entre m' et m''; elle prend une seule fois chacune des valeurs m', m''; enfin elle ne prend aucune valeur inférieure à m' ni aucune valeur supérieure à m'' : m' est la plus petite des valeurs prises par la fraction, m'' la plus grande.

Les valeurs de x pour lesquelles la fraction est égale à m' ou à m'' sont respectivement

$$x'=-\frac{b-m'b'}{2(a-m'a')}, \qquad x''=-\frac{b-m''b'}{2(a-m''a')}.$$

Proposons-nous de former une équation du second degré ayant x' et x'' pour racines. On a

$$x'=-\frac{b-m'b'}{2(a-m'a')}=-\frac{2(c-m'c')}{b-m'b'},$$

en vertu de l'égalité

$$4(a-m'a')(c-m'c')-(b-m'b')^2=0.$$

Donc

$$2ax'+b=m'(2a'x'+b'),$$
$$bx'+2c=m'(b'x'+2c'):$$

x' satisfait donc à l'équation du second degré

$$(2ax+b)(b'x+2c')=(2a'x+b')(bx+2c);$$

x'' satisfait également à cette équation, qui répond à la question.

Ici encore, nous avons supposé $m\neq\frac{a}{a'}$. Voyons combien de fois la fraction prend la valeur $\frac{a}{a'}$. D'abord, si $ab'-a'b$ est

$\neq 0$, la valeur $\frac{a}{a'}$ est comprise entre m' et m'', car on a

$$\varphi\left(\frac{a}{a'}\right) = -\left(b - \frac{a}{a'}b'\right)^2 < 0.$$

D'ailleurs, pour $m = \frac{a}{a'}$, l'équation (2) s'abaisse au premier degré. Donc la fraction prend une fois et une seule la valeur $\frac{a}{a'}$. Si maintenant $ab' - a'b = 0$, la valeur $\frac{a}{a'}$ est égale à m' ou à m''. D'ailleurs, pour $m = \frac{a}{a'}$, le premier membre de l'équation (2) se réduit à $c - \frac{a}{a'}c'$, qui est $\neq 0$, sans quoi R serait nul, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc, dans ce cas, la fraction ne prend jamais la valeur $\frac{a}{a'}$.

$A < 0$. — Les valeurs de m vérifiant l'inéquation (3) sont, cette fois, les valeurs inférieures à m' et les valeurs supérieures à m''. Pour $m = m'$ ou $m = m''$, on a $Am^2 + 2Bm + C = 0$. Ainsi, pour $m < m'$ ou $m > m''$, l'équation (2) a deux racines distinctes; pour $m' < m < m''$, elle n'a aucune racine; pour $m = m'$ ou $m = m''$, elle a deux racines égales. Si donc on donne à x toutes les valeurs possibles, la fraction prend deux fois toutes les valeurs inférieures à m' et deux fois toutes les valeurs supérieures à m'', une fois chacune des valeurs m', m''; enfin elle ne prend aucune valeur comprise entre m' et m''. Les valeurs de x pour lesquelles la fraction est égale à m' ou à m'' sont encore

$$x' = -\frac{b - m'b'}{2(a - m'a')}, \qquad x'' = -\frac{b - m''b'}{2(a - m''a')}.$$

Enfin considérons la valeur $\frac{a}{a'}$. Si $ab' - a'b$ est $\neq 0$, on a, soit $\frac{a}{a'} < m'$, soit $\frac{a}{a'} > m''$, et la fraction prend une seule fois la valeur $\frac{a}{a'}$. Si $ab' - a'b = 0$, la valeur $\frac{a}{a'}$ est égale à m' ou à m'', et la fraction ne prend jamais cette valeur.

$A = 0$. Dans ce cas, on ne peut pas avoir $B = 0$, sans quoi R serait nul. Supposons, pour fixer les idées, $B < 0$. L'inéquation (3) se réduit au premier degré :

$$2Bm + C \leqslant 0.$$

Soit m' la racine, $-\frac{C}{2B}$, du binome $2Bm + C$. Les valeurs de m satisfaisant à l'inéquation précédente sont les valeurs supérieures à m'. Ainsi, pour $m > m'$, l'équation (2) a deux racines distinctes ; pour $m < m'$, elle n'a aucune racine ; pour $m = m'$, elle a deux racines égales. Donc, quand x prend toutes les valeurs possibles, la fraction prend deux fois toutes les valeurs supérieures à m', une fois la valeur m', et ne prend aucune valeur inférieure à m' : m' est la plus petite des valeurs de la fraction. La fraction est égale à m' pour $x = -\frac{b - m'b'}{2(a - m'a')}$.

On voit comme précédemment que, si $ab' - a'b$ est $\neq 0$, on a $\frac{a}{a'} > m'$, et que la fraction prend une fois la valeur $\frac{a}{a'}$. Si $ab' - a'b$ est $= 0$, la valeur $\frac{a}{a'}$ est égale à m', et la fraction ne prend jamais cette valeur.

Enfin, si nous avions supposé $B > 0$, nous aurions trouvé que la fraction prend toutes les valeurs inférieures ou égales à m', m' étant égal à $-\frac{C}{2B}$: m' eût été la plus grande des valeurs de la fraction.

II. — ÉQUATIONS ET SYSTÈMES D'ÉQUATIONS RÉDUCTIBLES AU SECOND DEGRÉ.

105. Équation bicarrée. — On appelle ainsi toute équation du quatrième degré, à une inconnue, qui ne renferme que des puissances paires de l'inconnue. Une pareille équation peut donc

toujours être mise sous la forme

$$(1) \qquad ax^4 + bx^2 + c = 0, \qquad (a \neq 0).$$

Proposons-nous de résoudre cette équation.

Considérons d'abord le cas particulier où c est nul sans que b le soit. L'équation est alors

$$ax^4 + bx^2 = 0, \qquad \text{ou} \qquad x^2(ax^2 + b) = 0;$$

elle se décompose en $x^2 = 0$, qui a deux racines nulles, et en $ax^2 + b = 0$, qui a deux racines égales à $\pm\sqrt{-\frac{b}{a}}$, ou qui n'a aucune racine, suivant que $-\frac{b}{a}$ est positif ou négatif.

Supposons maintenant que b soit nul sans que c le soit. L'équation est alors $ax^4 + c = 0$. Elle n'a aucune racine si a et c sont de même signe, et, si a et c sont de signes contraires, elle admet deux racines, $\pm\sqrt[4]{-\frac{c}{a}}$.

Enfin, lorsque b et c sont nuls à la fois, l'équation se réduit à $ax^4 = 0$; elle admet quatre racines égales à zéro.

Arrivons au cas général, où a, b, c sont tous trois $\neq 0$. Si a, b, c sont de même signe, il est évident que l'équation (1) n'a aucune racine (telle est, pare xemple, l'équation $x^4 + x^2 + 1 = 0$). Si a, b, c n'ont pas le même signe, et si l'équation (1) admet la racine x', elle admet aussi la racine $-x'$; si elle admet pour racines les deux nombres x', x'' non opposés, elle admet aussi pour racines les deux nombres $-x'$, $-x''$; et, dans ce dernier cas, elle n'a pas d'autre racine, une équation du quatrième degré ne pouvant avoir plus de quatre racines.

Ces remarques faites, supposons que l'équation (1) ait pour racine le nombre x' ; alors l'équation

$$(2) \qquad ay^2 + by + c = 0$$

admettra la racine *positive* $y = x'^2$. Par suite, si l'équation (2) n'a aucune racine positive, l'équation (1) n'a aucune racine. En particulier, si l'équation (2) n'a aucune racine, l'équation (1) n'en a pas non plus.

Inversement, soit y' une racine positive de (2) ; alors les

racines de l'équation $x^2 = y'$ sont des racines de l'équation (1). On voit ainsi que le nombre des racines de (1) est égal au double du nombre des racines positives de (2).

Or, pour que l'équation (2) ait une racine positive et une seule, il faut et il suffit que $\frac{c}{a}$ soit négatif. Ainsi $\frac{c}{a} < 0$ est la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (1) ait deux racines et pas plus. Ces racines sont, en supposant $a > 0$,

$$\pm\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}.$$

Pour que l'équation (2) ait deux racines positives, ou, ce qui revient au même, pour que l'équation (1) ait quatre racines, il faut et il suffit qu'on ait :

$$4ac - b^2 \leqslant 0, \qquad \frac{c}{a} > 0, \qquad -\frac{b}{a} > 0.$$

Ces racines sont

$$\pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}}.$$

Pour qu'elles soient distinctes, il faut que $4ac - b^2$ ne soit pas nul. Lorsque $4ac - b^2$ est nul, l'équation (1) admet deux racines doubles, $\pm\sqrt{-\frac{b}{2a}}$. Dans tous les autres cas, elle n'a aucune racine.

Exemple : Quel est, suivant la valeur de λ, le nombre des racines de l'équation $x^4 - 2\lambda x^2 + \lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$?

Un calcul déjà fait nous montre :

1° Que, pour que l'équation admette deux racines et deux seulement, il faut et il suffit que l'on ait $-3 \leqslant \lambda < +1$;

2° Que, pour qu'elle admette quatre racines, il faut et il suffit que l'on ait $1 \leqslant \lambda \leqslant \frac{3}{2}$.

Voici le tableau qui résume la discussion :

λ		-3		$+1$		$\frac{3}{2}$	
	aucune racine	2 racines nulles	2 racines	2 racines nulles 2 autres $=\pm\sqrt{2}$	4 racines	2 r. $=+\sqrt{\frac{3}{2}}$ 2 r. $=-\sqrt{\frac{3}{2}}$	aucune racine.

106. Plus généralement, soit proposé de résoudre l'équation

(1) $$ax^{2n}+bx^n+c=0,$$

n étant un entier positif supérieur à 1. En raisonnant comme précédemment, on est conduit à résoudre l'équation

(2) $$ay^2+by+c=0.$$

Si l'équation (2) n'a aucune racine, l'équation (1) n'en a pas non plus. Si l'équation (2) a des racines y', y'', les racines de l'équation (1) sont celles des équations $x^n=y'$, $x^n=y''$. Si n est pair, le nombre des racines de (1) est le double du nombre des racines *positives* de (2); si n est impair, à chaque racine de (2) correspond une racine et une seule de (1) : l'équation (1) a deux racines, comme l'équation (2).

Plus généralement encore, soit à résoudre l'équation

(1) $$a[f(x)]^2+bf(x)+c=0,$$

$f(x)$ étant un polynome. On considérera encore l'équation

(2) $$ay^2+by+c=0.$$

Si elle n'a aucune racine, l'équation (1) n'en a pas non plus. Si l'équation (2) admet des racines y', y'', les racines de l'équation (1) sont celles des deux équations

(3) $$f(x)=y', \qquad f(x)=y''.$$

On saura donc résoudre l'équation (1) si on sait résoudre les équations (3). C'est ce qui arrivera, en particulier, toutes les fois que $f(x)$ sera un polynome du second degré.

107. Signe du trinome bicarré. — L'expression

(1) $$ax^4+bx^2+c \qquad (a\neq 0)$$

porte le nom de *trinome bicarré*. Proposons-nous de trouver son

signe suivant la valeur attribuée à x. Pour cela, mettons-le sous la forme

(2) $$ay^2 + by + c$$

en posant $x^2 = y$, et distinguons trois cas :

1° Le trinome (2) n'a aucune racine. Ce trinome a alors le signe de $+a$, quel que soit y : donc le trinome (1) a le signe de $+a$, quel que soit x.

2° Le trinome (2) a une racine double, $-\frac{b}{2a}$. Ce trinome a alors le signe de $+a$, quel que soit y, sauf pour $y = -\frac{b}{2a}$, valeur pour laquelle il s'annule. Si $-\frac{b}{2a}$ est < 0, x^2 n'est jamais égal à $-\frac{b}{2a}$, et le trinome (1) a le signe de $+a$ quel que soit x; si $-\frac{b}{2a}$ est > 0, x^2 devient égal à $-\frac{b}{2a}$ pour deux valeurs de x, $+\sqrt{-\frac{b}{2a}}$ et $-\sqrt{-\frac{b}{2a}}$: le trinome (1) a donc le signe de $+a$, quel que soit x, sauf pour $x = \pm\sqrt{-\frac{b}{2a}}$, valeurs pour lesquelles il s'annule; si enfin on a $-\frac{b}{2a} = 0$, ce qui entraîne $c = 0$, le trinome se réduit à ax^4 et a toujours le signe de $+a$, sauf pour $x = 0$, valeur pour laquelle il s'annule.

3° Le trinome (2) admet deux racines distinctes y', y'' $(y' < y'')$. On a, dans ce cas,

$$ay^2 + by + c \equiv a(y - y')(y - y''),$$

et par suite

$$ax^4 + bx^2 + c \equiv a(x^2 - y')(x^2 - y'').$$

Supposons d'abord $y' < 0 < y''$; alors le facteur $x^2 - y'$ est positif quel que soit x; quant au facteur $x^2 - y''$, il est négatif pour les valeurs de x comprises entre $-\sqrt{y''}$, $+\sqrt{y''}$, et positif pour les autres valeurs de x. Donc le trinome (1) a le signe de $+a$ pour les valeurs de x inférieures à $-\sqrt{y''}$ ou

supérieures à $+\sqrt{y''}$, et le signe de $-a$ pour les valeurs de x comprises entre $-\sqrt{y''}$ et $+\sqrt{y''}$.

Supposons maintenant y' et y'' négatifs; alors $x^2 - y'$, $x^2 - y''$ sont positifs quel que soit x, et le trinome (1) a le signe de $+a$, quel que soit x.

Supposons enfin y' et y'' positifs. Le signe de $x^2 - y'$ dépend alors de la position de x par rapport à $\pm\sqrt{y'}$; de même, le signe de $x^2 - y''$ dépend de la position de x par rapport à $\pm\sqrt{y''}$. Rangeons ces quatre nombres $\pm\sqrt{y'}$, $\pm\sqrt{y''}$ par ordre de grandeur croissante :

$$-\sqrt{y''}, \qquad -\sqrt{y'}, \qquad +\sqrt{y'}, \qquad +\sqrt{y''}.$$

Pour $x < -\sqrt{y''}$, $x^2 - y'$, $x^2 - y''$ sont positifs, et le trinome (1) a le signe de $+a$. Pour $-\sqrt{y''} < x < -\sqrt{y'}$, $x^2 - y'$ est positif et $x^2 - y''$ est négatif : le trinome a le signe de $-a$. Pour $-\sqrt{y'} < x < +\sqrt{y'}$, $x^2 - y'$ et $x^2 - y''$ sont négatifs : le trinome a le signe de $+a$. On voit de même que le trinome a le signe de $-a$ pour $\sqrt{y'} < x < \sqrt{y''}$ et celui de $+a$ pour $\sqrt{y''} < x$, ce qui du reste résulte *a priori* de ce que le trinome prend des valeurs égales pour deux valeurs de x opposées.

En résumé : si le trinome (1) n'a aucune racine, il a toujours le signe de $+a$; s'il a deux racines simples, il a le signe de $-a$ pour les valeurs de x comprises entre ces racines et le signe de $+a$ pour les autres valeurs de x; s'il a quatre racines distinctes, il a le signe de $-a$ pour x compris entre la première et la seconde, ou entre la troisième et la quatrième, et le signe de $+a$ pour les autres valeurs de x.

108. Voici une propriété intéressante du trinome

$$x^4 + px^2 + q.$$

Quels que soient p et q, il existe quatre nombres a, b, a', b' tels qu'on ait

$$x^4 + px^2 + q \equiv (x^2 + ax + b)(x^2 + a'x + b').$$

Supposons d'abord $4q - p^2 \leqslant 0$: alors le trinome

$$y^2 + py + q$$

admet deux racines y', y'', et l'on a

$$y^2 + py + q \equiv (y - y')(y - y''),$$

d'où
$$x^4 + px^2 + q \equiv (x^2 - y')(x^2 - y'').$$

Soit maintenant $4q - p^2 > 0$; alors q est positif, et l'on a

$$x^4 + px^2 + q \equiv (x^2 + \sqrt{q})^2 - (2\sqrt{q} - p)x^2.$$

D'ailleurs $2\sqrt{q} - p$ est positif : cela est évident si p est négatif ou nul, et, si p est positif, cela résulte de l'inégalité $4q > p^2$. On a donc

$$x^4 + px^2 + q \equiv (x^2 + \sqrt{q})^2 - \left[\sqrt{2\sqrt{q} - p}\, x\right]^2$$
$$\equiv \left(x^2 - \sqrt{2\sqrt{q} - p}\, x + \sqrt{q}\right)\left(x^2 + \sqrt{2\sqrt{q} - p}\, x + \sqrt{q}\right).$$

Exemples : $x^4 - 1 \equiv (x^2 - 1)(x^2 + 1)$,

$$x^4 + 1 \equiv (x^2 + 1)^2 - 2x^2 \equiv (x^2 - \sqrt{2}\, x + 1)(x^2 + \sqrt{2}\, x + 1),$$
$$x^4 + x^2 + 1 \equiv (x^2 + 1)^2 - x^2 \equiv (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1).$$

109. Question d'arithmétique. — Reprenons le cas où l'équation

$$ax^4 + bx^2 + c = 0, \qquad a \neq 0,$$

admet quatre racines distinctes :

$$4ac - b^2 < 0, \qquad \frac{c}{a} > 0, \qquad -\frac{b}{a} > 0.$$

Les expressions des racines positives sont

$$\sqrt{\frac{-b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}} \qquad \text{ou} \qquad \sqrt{A \pm \sqrt{B}},$$

A et B désignant les nombres positifs $-\dfrac{b}{2a}$ et $\dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}$.

Si les nombres a, b, c sont rationnels, les nombres A et B le sont aussi ; mais le nombre $\sqrt{B}$ est, en général, irrationnel. Voyons si l'on ne peut pas, dans ce cas, ramener le calcul de $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ au calcul de plusieurs racines carrées de nombres *rationnels*.

Nous nous appuierons sur la remarque suivante :

Soit a et b deux nombres positifs rationnels, $\sqrt{b}$ étant *irrationnel*; soit a' et b' deux autres nombres positifs rationnels. On ne peut pas avoir

$$(1) \qquad a + \sqrt{b} = a' + \sqrt{b'}$$

sans avoir à la fois $a = a'$, $b = b'$.

En effet, l'égalité (1) entraine celle-ci :

$$b' = a - a' + b + 2(a - a')\sqrt{b}\,;$$

si $a - a'$ était $\neq 0$, cette dernière égalité donnerait pour $\sqrt{b}$ une valeur rationnelle, ce qui est contre l'hypothèse. Donc on a $a = a'$, et par suite $b = b'$.

De même, l'égalité

$$a - \sqrt{b} = a' - \sqrt{b'}$$

entraine

$$a = a', \qquad b = b'.$$

Enfin, on ne peut avoir ni l'égalité

$$a + \sqrt{b} = a' - \sqrt{b'},$$

ni l'égalité

$$a - \sqrt{b} = a' + \sqrt{b'}.$$

110. Premier problème. — *A et B étant deux nombres positifs et rationnels donnés, et $\sqrt{B}$ étant irrationnel, calculer, lorsque cela est possible, deux nombres positifs rationnels x et y tels qu'on ait*

$$(1) \qquad \sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

Observons d'abord que, si deux nombres positifs x et y vérifient l'équation (1), ils vérifient aussi l'équation

$$(2) \qquad A + \sqrt{B} = x + y + 2\sqrt{xy}.$$

Inversement, si deux nombres positifs x et y vérifient l'équation (2), ils vérifient aussi l'équation (1), sans quoi ils vérifieraient l'équation $-\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$, ce qui est absurde. Tout revient donc à calculer deux nombres positifs et

rationnels x et y satisfaisant à l'équation (2). Or, d'après la remarque préliminaire, si deux nombres positifs et rationnels x et y vérifient l'équation (2), ils vérifient le système

$$(3) \qquad x + y = A, \qquad xy = \frac{B}{4};$$

si donc il existe des nombres répondant à la question, ces nombres sont les racines de l'équation

$$(4) \qquad Z^2 - AZ + \frac{B}{4} = 0.$$

Il faut donc, pour que le problème soit possible, que $A^2 - B$ soit positif; mais cela ne suffit pas : il faut en outre que $\sqrt{A^2 - B}$ soit rationnel. Cette double condition étant supposée remplie, l'équation (4) admet deux racines positives et rationnelles constituant une solution de l'équation (1). On prendra pour x l'une quelconque de ces racines, et l'autre pour y.

Ainsi, pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que $A^2 - B$ soit positif et que $\sqrt{A^2 - B}$ soit rationnel. Le problème admet alors une solution unique :

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} + \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}.$$

Remarques. — 1° Cette formule est encore vraie quand $\sqrt{A^2 - B}$ n'est pas rationnel, et même quand A et B ne sont pas rationnels, pourvu que $A^2 - B$ soit positif; mais alors elle n'a pas d'intérêt pratique. Du reste, si l'on n'assujettit pas x et y à être rationnels, l'équation (1) a une infinité de solutions.

2° Il n'existe pas de nombres positifs rationnels x, y tels que

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}:$$

car ces nombres vérifieraient l'équation

$$A + \sqrt{B} = x + y - 2\sqrt{xy},$$

ce qui, d'après la remarque préliminaire, est impossible.

111. Deuxième problème. — A *et* B *étant deux nombres positifs et rationnels donnés vérifiant l'inégalité* $A > \sqrt{B}$ *ou*

$A^2 - B > 0$, *et* $\sqrt{B}$ *étant irrationnel, calculer, lorsque cela est possible, deux nombres positifs rationnels* x, y *tels qu'on ait*

$$(1) \qquad \sqrt{A - \sqrt{B}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}.$$

Observons d'abord que, si deux nombres positifs x et y vérifient l'équation (1), ils vérifient aussi l'équation

$$(2) \qquad A - \sqrt{B} = x + y - 2\sqrt{xy}.$$

Inversement, si deux nombres positifs x et y vérifient l'équation (2), ils vérifient l'équation (1) ou la suivante :

$$-\sqrt{A - \sqrt{B}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}.$$

Le premier cas a lieu si x est $> y$, le second si x est $< y$. Tout revient donc à calculer deux nombres positifs et rationnels x et y vérifiant l'équation (2); il faudra prendre pour x le plus grand des deux et l'autre pour y. Or, si deux nombres positifs et rationnels vérifient l'équation (2), ils vérifient le système

$$(3) \qquad x + y = A, \qquad xy = \frac{B}{4};$$

ce sont donc les racines de l'équation

$$(4) \qquad Z^2 - AZ + \frac{B}{4} = 0.$$

Cette équation a deux racines positives; pour qu'elles soient rationnelles, il faut que $\sqrt{A^2 - B}$ soit rationnel. Ces deux racines forment une solution de l'équation (1), à condition qu'on prenne pour x la plus grande des deux. Ainsi, pourvu que $\sqrt{A^2 - B}$ soit rationnel, le problème admet une solution et une seule :

$$\sqrt{A - \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} - \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}.$$

Remarques : 1° Cette égalité est encore vraie quand $\sqrt{A^2 - B}$ est irrationnel, et même quand A et B sont irrationnels; mais alors elle n'a pas d'intérêt pratique.

2° Il n'y a pas de nombres positifs et rationnels x, y vérifiant

l'équation

$$\sqrt{A-\sqrt{B}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

112. Applications : Considérons l'expression $\sqrt{10 \pm 2\sqrt{5}}$. On a $A = 10$, $B = 20$, et par suite $A^2 - B = 80$; or $\sqrt{80}$ est irrationnel, donc la transformation n'est pas possible.

Mais si on prend l'expression $\sqrt{3 \pm \sqrt{5}}$, on a $A = 3$, $B = 5$, et par suite $A^2 - B = 4$, $\sqrt{A^2 - B} = 2$. La transformation est donc possible :

$$\sqrt{3 \pm \sqrt{5}} = \sqrt{\frac{3+2}{2}} \pm \sqrt{\frac{3-2}{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}} \pm \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Revenons à l'équation bicarrée, dans le cas où elle a quatre racines distinctes. Ses racines positives sont

$$\sqrt{-\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}}.$$

On a, dans le cas actuel,

$$A = -\frac{b}{2a}, \qquad B = \frac{b^2-4ac}{4a^2}, \qquad A^2 - B = \frac{c}{a}.$$

Pour que la transformation soit possible, il faut que $\sqrt{\frac{c}{a}}$ soit rationnel. Cette condition étant supposée remplie, les racines sont données par la formule

$$\pm\left[\sqrt{\frac{-\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{c}{a}}}{2}} \pm \sqrt{\frac{-\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{c}{a}}}{2}}\right].$$

Cette formule donne encore les racines quand $\sqrt{\frac{c}{a}}$ est irrationnel, et même quand a, b, c sont irrationnels, pourvu que les nombres $b^2 - 4ac$, $\frac{c}{a}$, $-\frac{b}{a}$ soient positifs.

113. Équations réciproques. — Soit

$$(1) \quad a_0x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \cdots + a_{m-2}x^2 + a_{m-1}x + a_m = 0$$

une équation entière de degré m. Nous dirons que cette équation est *réciproque* si l'on a les égalités

$$(2) \qquad a_m = a_0, \quad a_{m-1} = a_1, \quad a_{m-2} = a_2, \quad \ldots,$$

ou bien si l'on a les égalités

$$(3) \quad a_m = -a_0, \quad a_{m-1} = -a_1, \quad a_{m-2} = -a_2, \quad \ldots,$$ et, en outre, si m est pair, $a_{\frac{m}{2}} = 0$.

On voit facilement que si un nombre x', différent de 0, est racine d'une telle équation, le nombre $\frac{1}{x'}$ en est également racine; qu'une équation réciproque de degré impair admet nécessairement la racine $+1$ ou la racine -1; enfin qu'une équation réciproque de degré pair, dans laquelle les coefficients des termes extrêmes et des termes équidistants des extrêmes sont opposés, admet nécessairement les racines $+1$ et -1.

Nous allons résoudre les équations réciproques du 3[e], du 4[e] et du 5[e] degré.

1° Résoudre l'équation

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0.$$

Cette équation peut s'écrire

$$a(x^3+1) + bx(x+1) = 0,$$

ou

$$(x+1)[a(x^2-x+1) + bx] = 0.$$

On voit qu'elle se décompose dans les deux suivantes :

$$x + 1 = 0,$$

qui admet la racine -1, et

$$ax^2 + (b-a)x + a = 0,$$

qui est réciproque et du second degré. Pour que cette dernière équation ait des racines, il faut que l'on ait

$$4a^2 - (b-a)^2 \leqslant 0, \qquad \text{ou} \qquad (b+a)(3a-b) \leqslant 0.$$

Ceci exige que b ne soit pas compris entre $-a$ et $3a$.

2° Résoudre l'équation

$$ax^3 + bx^2 - bx - a = 0.$$

Nous l'écrirons

$$a(x^3 - 1) + bx(x - 1) = 0,$$

ou

$$(x - 1)[a(x^2 + x + 1) + bx] = 0.$$

Elle se décompose dans les deux suivantes :

$$x - 1 = 0,$$

qui admet la racine $+1$, et

$$ax^2 + (a + b)x + a = 0,$$

qui est réciproque et du second degré.

3° Résoudre l'équation

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0.$$

Écrivons-la

$$a(x^4 + 1) + b(x^3 + x) + cx^2 = 0.$$

Elle équivaut à la suivante :

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0.$$

Prenons comme inconnue auxiliaire

$$x + \frac{1}{x} = y.$$

Nous aurons

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2,$$

et l'équation devient

$$a(y^2 - 2) + by + c = 0,$$

ou

$$ay^2 + by + c - 2a = 0.$$

Si cette équation en y n'a aucune racine, la proposée n'en a pas non plus. Supposons que cette équation en y ait des racines y', y''. Alors il restera à résoudre les équations

$$x + \frac{1}{x} = y', \qquad x + \frac{1}{x} = y''.$$

Considérons la première. Elle équivaut à

$$x^2 - y'x + 1 = 0,$$

et, pour qu'elle ait des racines, il faut et il suffit que l'on ait $4 - y'^2 \leqslant 0$, c'est-à-dire que y' ne soit pas compris entre -2 et $+2$.

En résumé, le nombre des racines de l'équation proposée est le double du nombre des racines de l'équation en y non comprises entre -2 et $+2$.

4° Résoudre l'équation

$$ax^4 + bx^3 - bx - a = 0.$$

Nous l'écrirons

$$a(x^4 - 1) + bx(x^2 - 1) = 0,$$

ou

$$(x^2 - 1)[a(x^2 + 1) + bx] = 0.$$

Elle se décompose en

$$x^2 - 1 = 0,$$

qui admet les racines $+1$ et -1, et

$$ax^2 + bx + a = 0,$$

qui est réciproque et du second degré.

5° Résoudre l'équation

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = 0.$$

Nous l'écrirons

$$a(x^5 + 1) + bx(x^3 + 1) + cx^2(x + 1) = 0,$$

ou

$$(x + 1)[a(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) + bx(x^2 - x + 1) + cx^2] = 0.$$

Elle se décompose en

$$x + 1 = 0,$$

qui admet la racine -1, et

$$ax^4 + (b - a)x^3 + (a - b + c)x^2 + (b - a)x + a = 0,$$

qui est réciproque et du quatrième degré, et qu'on sait résoudre.

On résoudrait d'une manière semblable l'équation réciproque

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 - cx^2 - bx - a = 0,$$

qui admet la racine $+1$.

Pour terminer, indiquons comment on doit s'y prendre pour résoudre une équation de la forme

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bkx + ak^2 = 0.$$

Cette équation équivaut à

$$a\left(x^2 + \frac{k^2}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{k}{x}\right) + c = 0.$$

On prendra

$$x + \frac{k}{x} = y$$

comme inconnue auxiliaire, et on aura

$$x^2 + \frac{k^2}{x^2} = y^2 - 2k,$$

d'où

$$a(y^2 - 2k) + by + c = 0.$$

Si cette équation du second degré en y n'a aucune racine, la proposée n'en a pas non plus. Si elle a deux racines y', y'', les racines de la proposée seront celles des deux équations

$$x + \frac{k}{x} = y', \qquad x + \frac{k}{x} = y''.$$

Soit, par exemple, à résoudre l'équation

$$b = \frac{4x - 4x^3}{1 - 6x^2 + x^4}.$$

Elle équivaut à la suivante :

$$bx^4 + 4x^3 - 6bx^2 - 4x + b = 0.$$

C'est une équation de la forme précédente, avec $k = -1$. On posera donc, pour la résoudre, $x - \frac{1}{x} = y$.

Systèmes d'équations réductibles au second degré.

114. Nous partagerons en trois catégories les systèmes de deux équations à deux inconnues que nous allons examiner :

1re CATÉGORIE. — *Une équation est du premier degré, l'autre du second.*

2e CATÉGORIE. — *Une équation est du premier degré, l'autre de degré supérieur au second.*

3e CATÉGORIE. — *Les deux équations sont du second degré.*

Systèmes de la première catégorie.

115. Soit à résoudre le système

$$(1)\qquad \begin{cases} y = mx + n, \\ ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0\,; \end{cases}$$

nous avons supposé, ce qui est évidemment légitime, l'équation du premier degré résolue par rapport à y.

Ce système équivaut au suivant :

$$(2)\begin{cases} y = mx + n, \\ ax^2 + dx + f + (bx + e)(mx + n) + c(mx + n)^2 = 0. \end{cases}$$

La seconde équation (2) est de la forme

$$Ax^2 + Bx + C = 0.$$

Supposons d'abord $A \neq 0$. Si $4AC - B^2$ est positif, la seconde équation (2) n'a aucune racine, et le système proposé n'a aucune solution. Si $4AC - B^2$ est $\leqslant 0$, la seconde équation (2) a deux racines x', x'', et le système (1) admet les deux solutions

$$x = x', \qquad y = mx' + n\,; \qquad x = x'', \qquad y = mx'' + n.$$

Voyons maintenant ce qui arrive pour $A = 0$. Si B n'est pas nul, la seconde équation (2) est du premier degré et admet l'unique racine $-\dfrac{C}{B}$. Le système (1) admet l'unique solution

$$x = -\frac{C}{B}, \qquad y = -m\frac{C}{B} + n.$$

Si enfin A et B sont nuls simultanément, ou bien C n'est pas nul, et alors le système n'a aucune solution ; ou bien C est nul, et alors la seconde équation est conséquence de la première : il y a une infinité de solutions, l'inconnue x pouvant être choisie arbitrairement.

116. Voici maintenant quelques exemples simples de systèmes rentrant bien dans la première catégorie, mais qu'il est préférable de résoudre sans faire usage de la méthode générale.

1er Exemple. — Résoudre le système

$$(1) \qquad x + y = a, \qquad xy = b^2.$$

Il s'agit, autrement dit, de trouver deux nombres dont on connaît la somme a et le produit b. Nous savons que ces deux nombres, s'ils existent, sont les racines de l'équation

$$(2) \qquad x^2 - ax + b^2 = 0.$$

Si $4b^2 - a^2$ est > 0, il n'y a aucune solution; si $4b^2 - a^2$ est $\leqslant 0$, l'équation (2) a deux racines x', x'', et le système admet les deux solutions

$$x = x', \qquad y = x'' \qquad \text{et} \qquad x = x'', \qquad y = x',$$

qui n'en forment qu'une, $x = y = \frac{a}{2}$, lorsque $4b^2 - a^2$ est $= 0$.

2e Exemple. — Résoudre le système

$$(3) \qquad x - y = a, \qquad xy = b^2.$$

On ramène ce système au précédent en prenant pour inconnues x et $-y$:

$$x + (-y) = a, \qquad x \times (-y) = -b^2.$$

x et $-y$ sont les racines de l'équation

$$(4) \qquad x^2 - ax - b^2 = 0.$$

Soit x', x'' les racines de cette équation. Le système (3) admet les deux solutions

$$x = x', \quad y = -x'' \qquad \text{et} \qquad x = x'', \quad y = -x'.$$

3e Exemple. — Résoudre les systèmes

$$x \pm y = a, \qquad x^2 \pm y^2 = b^2.$$

Ces systèmes sont au nombre de quatre. Considérons d'abord le suivant :

$$(5) \qquad x + y = a, \qquad x^2 + y^2 = b^2.$$

Écrivons la seconde équation sous la forme

$$(x+y)^2 - 2xy = b^2,$$

et remplaçons-y $x+y$ par sa valeur a ; nous aurons

$$a^2 - 2xy = b^2,$$

d'où

$$xy = \frac{a^2 - b^2}{2},$$

ce qui nous ramène au 1er exemple.

On ramène le système

$$x - y = a, \qquad x^2 + y^2 = b^2$$

au précédent, en prenant pour inconnues x et $-y$.

Considérons maintenant le système

$$(6) \qquad x + y = a, \qquad x^2 - y^2 = b^2.$$

Écrivons la seconde équation (6) ainsi :

$$(x+y)(x-y) = b^2,$$

puis remplaçons-y $x+y$ par sa valeur a. Nous substituons ainsi au système (6) le système équivalent

$$(7) \qquad x + y = a, \qquad a(x-y) = b^2.$$

Il n'a aucune solution pour $a = 0$ (à moins que b ne soit aussi nul, auquel cas il a une infinité de solutions) ; pour $a \neq 0$, il admet la solution unique

$$x = \frac{1}{2}\left(a + \frac{b^2}{a}\right), \qquad y = \frac{1}{2}\left(a - \frac{b^2}{a}\right).$$

On résoudrait de même le système

$$x - y = a, \qquad x^2 - y^2 = b^2.$$

Si à ces deux derniers systèmes on appliquait la méthode géné-

rale, on trouverait une équation en x qui ne serait que du premier degré.

Systèmes de la deuxième catégorie.

117. Mettons, comme précédemment, l'équation du premier degré sous la forme $y = mx + p$. En remplaçant y par $mx + p$ dans l'autre équation, qui est de degré n, on obtient une équation en x qui est au plus de degré n. A toute racine x' de cette équation correspond une solution, $x = x'$, $y = mx' + p$ du système proposé.

Voici deux exemples rentrant dans cette catégorie, mais que, comme les précédents, nous résoudrons sans faire usage de la méthode générale.

1er Exemple. — Soit à résoudre le système

$$(1) \qquad x + y = a, \qquad x^3 + y^3 = b^3.$$

Mettons la seconde équation sous la forme

$$(x + y)^3 - 3xy(x + y) = b^3,$$

et remplaçons-y $x + y$ par a. Il vient

$$a^3 - 3axy = b^3,$$

d'où

$$xy = \frac{a^3 - b^3}{3a}.$$

On est ramené au système

$$(2) \qquad x + y = a, \qquad xy = \frac{a^3 - b^3}{3a}$$

déjà étudié. Si l'on appliquait à cet exemple la méthode générale, on obtiendrait une équation en x du second degré seulement.

2e Exemple. — Soit à résoudre le système

$$(3) \qquad x + y = a, \qquad x^4 + y^4 = b^4.$$

Mettons la seconde équation sous la forme suivante :

$$(x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = b^4 \quad \text{ou} \quad [(x + y)^2 - 2xy]^2 - 2x^2y^2 = b^4,$$

puis remplaçons-y $x+y$ par a, et posons, pour abréger, $xy = z$; nous aurons

$$(4) \qquad 2z^2 - 4a^2z + a^4 - b^4 = 0.$$

Si cette équation (4) n'a aucune racine, le système (3) n'a aucune solution. Soit z une racine de l'équation (4); il lui correspondra deux solutions du système (3), pourvu que l'équation

$$x^2 - ax + z = 0$$

ait des racines, ou que $4z - a^2$ soit négatif ou nul. Ainsi le nombre de solutions du système (3) est égal au double du nombre de racines de (4) vérifiant l'inéquation $z \leqslant \frac{a^2}{4}$.

Or soit $f(z)$ le premier membre de (4). On a

$$f\left(\frac{a^2}{4}\right) = \frac{a^4}{8} - b^4.$$

$b^4 > \frac{a^4}{8}$ est donc la condition nécessaire et suffisante pour que le système (3) admette deux solutions; elles seront fournies par la plus petite racine de l'équation (4). Il est impossible que les racines de (4) soient l'une et l'autre inférieures à $\frac{a^2}{4}$, car leur somme $2a^2$ est supérieure à $\frac{a^2}{2}$. Donc, en résumé, le système (3) admet deux solutions ou n'en admet aucune, suivant que b^4 est supérieur ou inférieur à $\frac{a^4}{8}$.

Systèmes de la troisième catégorie.

118. Soit le système

$$(1) \qquad \begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \\ a'x^2 + b'xy + c'y^2 + d'x + e'y + f' = 0. \end{cases}$$

Examinons d'abord le cas particulier où l'une des équations (1) ne renferme pas de terme en x^2 ou en y^2. Supposons, par exemple, $c = 0$. Alors, en résolvant la première équation

par rapport à y, et en remplaçant y par son expression dans la seconde équation, on substitue au système (1) le système équivalent

$$(2) \begin{cases} y = -\dfrac{ax^2+dx+f}{bx+e}, \\ (a'x^2+d'x+f')(bx+e)^2-(b'x+e')(bx+e)(ax^2+dx+f) \\ \qquad\qquad +c'(ax^2+dx+f)^2 = 0. \end{cases}$$

La seconde équation (2) est au plus du quatrième degré, et le nombre des solutions du système (1) égale le nombre des racines de cette équation. Si on sait la résoudre, on saura résoudre le système proposé.

Pour ramener le cas général à ce cas particulier, on ajoute membre à membre les équations (1), après avoir multiplié par c' les deux membres de la première et par $-e$ les deux membres de la seconde. On obtient ainsi une équation pouvant remplacer l'une ou l'autre des équations (1) $(cc' \neq 0)$, et ne renfermant pas de terme en y^2.

119. Comme exemple, nous résoudrons le système

$$(1) \qquad x^2+y^2=a^2, \qquad xy=b^2 \ (b\neq 0)$$

d'abord par la méthode générale, ensuite par une autre méthode plus symétrique et plus simple.

1° Le système (1) équivaut au suivant :

$$(2) \quad y=\frac{b^2}{x}, \quad x^2+\frac{b^4}{x^2}=a^2 \quad \text{ou} \quad x^4-a^2x^2+b^4=0.$$

Sous la seule condition $4b^4-a^4 \leqslant 0$, ou $2b^2-a^2 \leqslant 0$, la seconde équation (2), qui est bicarrée, admet quatre racines, deux positives :

$$x'=\sqrt{\frac{a^2+\sqrt{a^4-4b^4}}{2}} \qquad \text{et} \qquad x''=\sqrt{\frac{a^2-\sqrt{a^4-4b^4}}{2}},$$

et deux négatives, $-x'$ et $-x''$. Par conséquent, le système (1) admet les quatre solutions suivantes :

$$\left(x', \frac{b^2}{x'}\right); \quad \left(x'', \frac{b^2}{x''}\right); \quad \left(-x', -\frac{b^2}{x'}\right); \quad \left(-x'', -\frac{b^2}{x''}\right).$$

Il est facile de vérifier — ce que du reste la symétrie des équations (1) fait prévoir — que les valeurs de y ne sont autre chose que les valeurs de x dans un ordre différent. En effet, x'^2 et x''^2 étant les racines de l'équation du second degré

$$y^2 - a^2y + b^4 = 0,$$

on a

$$x'^2x''^2 = b^4, \qquad \text{et par suite} \qquad x'x'' = b^2;$$

d'où l'on conclut

$$\frac{b^2}{x'} = x'' \qquad \text{et} \qquad \frac{b^2}{x''} = x';$$

de sorte que les quatre solutions du système (1) sont

$$(x', x''); \qquad (x'', x'); \qquad (-x', -x''); \qquad (-x'', -x').$$

2° Pour résoudre le système (1), on peut procéder ainsi : on ajoute et on retranche membre à membre les équations (1) après avoir multiplié par 2 les deux membres de la seconde; on obtient ainsi le système

$$(3) \qquad (x+y)^2 = a^2 + 2b^2, \qquad (x-y)^2 = a^2 - 2b^2,$$

équivalent au système (1). Pour qu'il ait des solutions, il faut et il suffit que $a^2 - 2b^2$ soit $\geqslant 0$. Cette condition étant supposée remplie, le système (3) se décompose en quatre systèmes formés d'équations du premier degré :

$$x + y = \pm\sqrt{a^2 + 2b^2}, \qquad x - y = \pm\sqrt{a^2 - 2b^2}.$$

Le système (1) admet donc quatre solutions. Considérons, par exemple, le système

$$x + y = \sqrt{a^2 + 2b^2}, \qquad x - y = \sqrt{a^2 - 2b^2};$$

il donne

$$x = \frac{1}{2}\left[\sqrt{a^2 + 2b^2} + \sqrt{a^2 - 2b^2}\right],$$

$$y = \frac{1}{2}\left[\sqrt{a^2 + 2b^2} - \sqrt{a^2 - 2b^2}\right].$$

Il est aisé de voir que cette solution n'est autre que (x', x''). En effet, appliquons aux expressions de x' et de x'' la transfor-

mation

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}.$$

Il vient

$$\sqrt{\frac{a^2}{2} \pm \sqrt{\frac{a^4}{4} - b^4}} = \sqrt{\frac{\frac{a^2}{2} + b^2}{2}} \pm \sqrt{\frac{\frac{a^2}{2} - b^2}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sqrt{a^2 + 2b^2} \pm \sqrt{a^2 - 2b^2}\right].$$

De même, les trois autres systèmes en lesquels se décompose (3) nous donneraient les solutions

$$(x'', x'); \qquad (-x', -x''); \qquad (-x'', -x').$$

EXERCICES

1. En supposant que l'équation $x^2 + px + q = 0$ ait deux racines distinctes, montrer que, quel que soit λ, l'équation

$$x^2 + px + q + \lambda(2x + p) = 0$$

a aussi deux racines distinctes.

2. L'équation

$$(x - a)(b - x) - (x - c)^2 = 0, \qquad a < c < b,$$

admet deux racines distinctes.

3. L'équation

$$(1 + \alpha^2)(x - a)(x - b) - (x - c)^2 = 0 \qquad (\alpha \neq 0),$$

admet deux racines. Ces racines sont distinctes si a, b, c ne sont pas tous trois égaux ; elles sont égales si $a = b = c$.

4. Discuter, suivant les valeurs de λ, les racines des équations suivantes :

$$x^2 - 4(\lambda - 3)x + (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0,$$
$$(\lambda - 1)x^2 - 2(\lambda - 2)x - (7\lambda + 1) = 0.$$

5. Discuter les racines de l'équation

$$(\lambda - 1)x^2 - 2(\lambda - 2)x - (\lambda + 1) = 0,$$

et déterminer λ de manière que l'équation ait deux racines x', x'' liées par la relation $x' + 2x'' = 0$.

6. Discuter les racines de l'équation

$$x^2 + [2\lambda(\lambda - b) - a^2]x + \lambda^2[(\lambda - b)^2 - a^2] = 0,$$

a et b étant positifs.

7. Résoudre l'inéquation

$$(\lambda - 2)x^2 - 2\lambda x - 1 > 0.$$

$>x<\dfrac{\lambda \mp \sqrt{\lambda^2+\lambda-2}}{\lambda-2}$ ou $-2<\lambda$

8. h étant donné, déterminer k de façon qu'on ait, quel que soit x,

$$\frac{(h+1)x^2 + hx + h}{x^2 + x + 1} > k.$$

$h < k < h + \frac{4}{3}$

9. R et R' étant les rayons de deux cercles, d la distance des centres, quelle doit être leur position relative pour qu'on ait, quel que soit x,

$$R^2x^2 + [d^2 - (R^2 + R'^2)]x + R'^2 > 0\ ?$$

10. Choisir λ de manière que l'équation

$$(\lambda + 2)x^2 - 4\lambda x + \lambda - 1 = 0$$

ait une racine > 3 et l'autre < 3.

$\lambda < -2$ ou $\lambda > \frac{17}{2}$

11. Résoudre les équations

$$x - \sqrt{4x^2 + 25} = 5,$$

$$2x^2 + 3x - 3 + \sqrt{2x^2 + 3x + 9} = 30,$$

$$\sqrt{x - 2} = x - a.$$

12. Dire, suivant la valeur de λ, combien chacune des équations

$$\pm\sqrt{\lambda x^2 - 1} = x - 2$$

a de racines.

13. Résoudre les équations

$$\pm\sqrt{2x + 1} \pm \sqrt{x + 1} = 1,$$

$$\pm\sqrt{x + 1} \pm \sqrt{7 - x} = 4,$$

$$\pm\sqrt{x - 1} \pm \sqrt{7 - 3x} = 2.$$

14. Résoudre l'équation

$$\sqrt{x - a} + \sqrt{x - b} = \sqrt{x - c}, \qquad a > b > c.$$

15. Résoudre l'inéquation

$$\frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 4}} > \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

$x > \sqrt{2}$ ou $-\sqrt{2} < x < 0$

16. Étant donné l'équation du second degré $f(x) = 0$, faire les transformations $y = x + \frac{1}{x}$, $y = \frac{x - \alpha}{\beta - x}$, $y = \frac{x + 1}{x - 1}$. Condition pour que les racines de la première transformée soient égales. — Au moyen de la seconde transformée, trouver la condition pour que $f(x)$ ait une racine unique comprise entre α et β. — Montrer que les racines de la troisième transformée sont opposées si celles de la proposée ont un produit égal à 1.

17. Discuter les racines de l'équation

$$(14\lambda - 1)x^2 - 2\lambda x + 1 = 0,$$

et déterminer λ de manière que cette équation ait deux racines x', x'' liées par la relation

$$3x'x'' = 2x' - x''.$$

λ = 0

18. Classer, suivant la valeur de λ, les racines des deux équations

$$x^2 + \lambda x - 1 = 0, \qquad x^2 - x - 1 = 0.$$

19. On donne les deux équations

$$x^2 - 5x + \lambda = 0, \qquad x^2 - 7x + 2\lambda = 0,$$

et on demande de calculer λ de façon qu'une des racines de la seconde équation soit double d'une des racines de la première.

20. Condition pour que les deux équations en t :

$$a(1 + t^2) = 2t, \qquad b(1 + t^2) = 1 - t^2$$

aient une racine commune. La condition étant supposée remplie, on demande de calculer la racine commune.

Même question pour les deux équations

$$a = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right), \qquad b = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right).$$

21. Comment faut-il choisir a pour que la fraction $\frac{x - a}{x^2 - 3x + 2}$ puisse prendre toutes les valeurs possibles ? 1 < a < 2

22. Déterminer a et b de façon que les valeurs de $\frac{ax + b}{x^2 + 1}$ soient les valeurs comprises entre $+4$ et -1.

23. Discuter l'équation

$$(\lambda - 2)x^4 - 2(\lambda + 3)x^2 + \lambda - 1 = 0.$$

24. Déterminer λ de façon que les quatre racines de l'équation

$$x^4 - (3\lambda + 5)x^2 + (\lambda + 1)^2 = 0$$

soient en progression arithmétique.

25. a^2 étant plus grand que c^2, résoudre l'équation

$$x^4 - 2a^2x^2 + c^4 = 0,$$

en considérant x^4 et c^4 comme deux termes de $(x^2 \pm c^2)^2$. Vérifier que les valeurs ainsi trouvées sont les mêmes que celles que donne la méthode ordinaire.

26. Résoudre les systèmes

$$\begin{cases} x + y = a, \\ (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) = b^5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = a, \\ x^5 + y^5 = b^5. \end{cases}$$

27. Résoudre les systèmes

$$\begin{cases} y = mx + n, \\ y^2 = 2px; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = mx + n. \\ x^2 - y^2 = a^2. \end{cases}$$

Discuter par rapport à n.

28. Résoudre le système

$$\begin{cases} (x + y)^4 = a^2(x^2 + y^2), \\ x^4 + y^4 = b^2(x^2 + y^2). \end{cases}$$

29. Résoudre les systèmes

$$\begin{cases} y^2 - 2px = 0, \\ (x - a)^2 + y^2 = R^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0, \\ (x - d)^2 + y^2 = R^2. \end{cases}$$

Discuter par rapport à R^2.

III. — PROBLÈMES DU SECOND DEGRÉ

120. On appelle ainsi les problèmes dont la résolution se ramène à la résolution soit d'une équation du second degré, soit d'une équation ou d'un système réductible au second degré. Commençons par quelques exemples simples de tels problèmes.

Problèmes a une inconnue. — *Problème du puits*. — On laisse

tomber, sans vitesse initiale, une pierre au fond d'un puits. On entend le bruit qu'elle fait en heurtant le fond un temps θ après le commencement de la chute. Quelle est la profondeur du puits ? — On connaît la vitesse v du son et l'accélération g due à la pesanteur.

Soit x la profondeur du puits. Le temps θ se compose : 1° du temps t de la chute ; 2° du temps t' que met le son à remonter le puits. Or on a

$$x = \frac{gt^2}{2}, \quad \text{d'où} \quad t = \sqrt{\frac{2x}{g}}; \quad x = vt', \quad \text{d'où} \quad t' = \frac{x}{v}.$$

L'équation du problème est donc la suivante :

$$(1) \quad \sqrt{\frac{2x}{g}} + \frac{x}{v} = \theta, \qquad \text{ou} \qquad \sqrt{\frac{2x}{g}} = \theta - \frac{x}{v}.$$

Elle est de la forme

$$P + \sqrt{Q} = 0,$$

Q n'étant que du premier degré. Le nombre des solutions est égal au nombre des racines de l'équation

$$(2) \qquad \left(\theta - \frac{x}{v}\right)^2 - \frac{2x}{g} = 0,$$

qui vérifient l'inéquation $x < v\theta$. Or soit $f(x)$ le premier membre de l'équation (2) ; on a

$$f(v\theta) = -\frac{2v\theta}{g},$$

et, comme le coefficient de x^2 est positif, l'équation (2) a une racine et une seule inférieure à $v\theta$. Cette équation ordonnée est

$$gx^2 - 2v(g\theta + v)x + gv^2\theta^2 = 0.$$

Sa plus petite racine a pour expression

$$\frac{v(g\theta + v) - v\sqrt{2g\theta v + v^2}}{g} = \frac{v}{g}\left[g\theta + v - \sqrt{v(2g\theta + v)}\right].$$

Telle est la profondeur du puits.

121. *Partage d'une droite en moyenne et extrême raison.* — On donne sur une droite deux points A, B (AB $= a$). Trou-

ver sur cette droite un point C tel que

$$\overline{AC}^2 = AB \times BC.$$

Si on prenait pour inconnue x la longueur AC, la connaissance de x n'entraînerait pas sans ambiguïté la connaissance de C. Choisissons donc sur AB un sens positif $x'x$, le sens AB par exemple, et prenons pour inconnue x la valeur algébrique du vecteur AC. Pour mettre le problème en équation, remarquons que le point C ne peut pas être à droite de B, car alors on aurait

$$AC > AB, \qquad AC > BC, \qquad \text{d'où} \qquad \overline{AC}^2 > AB \times BC.$$

Donc, des deux nombres $\overline{AB}$ et $\overline{BC}$, le premier est positif et le second négatif, et l'on doit avoir

$$\overline{AC}^2 + \overline{AB} \times \overline{BC} = 0.$$

Or

$$\overline{AC} = x, \qquad \overline{AB} = a, \qquad \overline{BC} = x - a.$$

L'équation du problème est donc

$$(1) \qquad x^2 + a(x - a) = 0, \qquad \text{ou} \qquad x^2 + ax - a^2 = 0.$$

Elle admet deux racines distinctes, l'une x' négative, l'autre x'' positive. Il y a donc deux points répondant à la question, l'un C′ à gauche de A, l'autre C″ entre A et B. On a :

$$x' = \overline{AC'} = -\frac{a}{2}(\sqrt{5}+1), \qquad x'' = \overline{AC''} = \frac{a}{2}(\sqrt{5}-1).$$

Ainsi

$$AC' = \frac{a}{2}(\sqrt{5}+1), \qquad AC'' = \frac{a}{2}(\sqrt{5}-1).$$

On retrouve facilement, en partant de ces expressions, la construction des points C′ et C″ indiquée en géométrie.

122. Voici maintenant deux exemples de problèmes à plusieurs inconnues :

Premier exemple. — Calculer les côtés x, y d'un rectangle, connaissant son périmètre $2p$ et sa diagonale d.

On a à résoudre le système

(1) $$x + y = p, \qquad x^2 + y^2 = d^2.$$

Nous avons vu que ce système équivaut au suivant :

$$x + y = p, \qquad xy = \frac{p^2 - d^2}{2}.$$

x et y sont donc les racines de l'équation

(2) $$z^2 - pz + \frac{p^2 - d^2}{2} = 0.$$

Pour que le problème soit possible, il faut qu'on ait

$$2(p^2 - d^2) - p^2 \leqslant 0, \qquad \text{ou} \qquad p^2 - 2d^2 \leqslant 0,$$

ou

$$(p + d\sqrt{2})(p - d\sqrt{2}) \leqslant 0,$$

ou simplement

$$p - d\sqrt{2} \leqslant 0,$$

car le facteur $p + d\sqrt{2}$ est positif. Cette condition nécessaire n'est pas suffisante : il faut encore que les deux racines de l'équation (2) soient positives. A la condition précédente il faut donc joindre la condition

$$p^2 - d^2 > 0, \qquad \text{ou} \qquad p > d.$$

Ainsi, pourvu qu'on ait

(3) $$d < p \leqslant d\sqrt{2},$$

le problème admet une solution et une seule. Les côtés du rectangle ont pour expressions

$$\frac{1}{2}\left[p + \sqrt{2d^2 - p^2}\right], \qquad \frac{1}{2}\left[p - \sqrt{2d^2 - p^2}\right].$$

Pour $p = d\sqrt{2}$, le rectangle est un carré de côté $\frac{d\sqrt{2}}{2}$. D'ailleurs $d\sqrt{2}$ est la plus grande valeur que puisse prendre p. Donc, parmi tous les rectangles de même diagonale, celui qui a le plus grand périmètre est le carré.

En écrivant ainsi les conditions de possibilité du problème :

$$\frac{p\sqrt{2}}{2} \leqslant d < p,$$

on voit que, de tous les rectangles de même périmètre, celui qui a la plus petite diagonale est le carré.

123. Deuxième exemple. — Calculer les côtés d'un triangle rectangle dont le périmètre est $2p$ et dont la surface égale celle d'un carré de côté donné a.

Appelons x, y, z les côtés inconnus, z étant l'hypoténuse. On a à résoudre le système

$$(1)\qquad x+y+z=2p, \qquad xy=2a^2, \qquad x^2+y^2=z^2.$$

Si nous connaissions z, nous serions ramenés à calculer deux nombres dont la somme et le produit sont donnés. Or, en écrivant la dernière équation (1) sous la forme

$$(x+y)^2-2xy=z^2,$$

puis en y remplaçant $x+y$ par $2p-z$ et xy par $2a^2$, nous voyons que z est racine de l'équation

$$(2p-z)^2-4a^2=z^2,$$

ou

$$p^2-pz-a^2=0,$$

d'où

$$(2)\qquad z=\frac{p^2-a^2}{p}.$$

Dès lors on a

$$x+y=\frac{p^2+a^2}{p},$$

de sorte que x, y sont les racines de l'équation

$$(3)\qquad u^2-\frac{p^2+a^2}{p}u+2a^2=0.$$

Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit 1° que z soit positif; 2° que l'équation (3) ait des racines; car, si ces racines existent, elles sont sûrement positives. Pour que la valeur (2) de z soit positive, il faut et il suffit que p^2-a^2 soit >0, ou que p soit $>a$. Pour que l'équation (3) ait des racines, il faut et il suffit que l'on ait

$$8a^2p^2-(p^2+a^2)^2\leqslant 0,$$

ou

$$(2ap\sqrt{2}+p^2+a^2)(2ap\sqrt{2}-p^2-a^2)\leqslant 0,$$

ou simplement

$$2ap\sqrt{2} - p^2 - a^2 \leqslant 0.$$

Le premier membre de cette inégalité est un trinome du second degré en p qui prend une valeur positive pour $p = a$. Donc il a des racines, et a est compris entre ces racines. Mais alors l'unique condition de possibilité du problème est que p soit supérieur ou égal à la plus grande racine :

(4) $$p \geqslant a(\sqrt{2} + 1).$$

Cette condition étant supposée remplie, le problème admet une solution unique. Les valeurs de x, y sont

$$\frac{1}{2p}\left[p^2 + a^2 + \sqrt{(p^2 + a^2)^2 - 8p^2a^2}\right],$$

$$\frac{1}{2p}\left[p^2 + a^2 - \sqrt{(p^2 + a^2)^2 - 8p^2a^2}\right].$$

Pour $p = a(\sqrt{2} + 1)$, on a un triangle rectangle isocèle dans lequel chaque côté de l'angle droit est égal à

$$\frac{2a^2\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1)}{2a(\sqrt{2} + 1)} = a\sqrt{2}.$$

D'ailleurs $a(\sqrt{2} + 1)$ est la plus petite valeur que puisse prendre p. Ainsi, de tous les triangles rectangles de même surface, celui qui a le plus petit périmètre est le triangle isocèle.

En écrivant ainsi la condition (4) :

$$a \leqslant p(\sqrt{2} - 1),$$

on verrait de même que, de tous les triangles rectangles ayant un périmètre donné, celui qui a la plus grande surface est le triangle isocèle.

124. Voici enfin des problèmes à une inconnue conduisant à des discussions plus longues. Nous les partagerons en deux classes.

Première classe de problèmes.

Supposons l'inconnue x assujettie à vérifier l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a \neq 0),$$

dont nous désignerons le premier membre par $f(x)$, et, en outre, à être inférieure à certains nombres $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$, sans être assujettie à être supérieure à d'autres nombres. (On procéderait d'une manière analogue si elle était assujettie à être supérieure à certains nombres sans être assujettie à être inférieure à d'autres nombres). Soit α le plus petit des nombres $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$: l'inéquation $x < \alpha$ entraîne les inéquations $x < \alpha'$, $x < \alpha''$, ...; la question est donc de savoir combien il y a de nombres x vérifiant l'équation $f(x) = 0$ et l'inéquation $x < \alpha$. D'après des résultats connus :

Pour que le problème ait une solution unique, il faut et il suffit qu'on ait

$$(1) \qquad af(\alpha) < 0.$$

La solution unique est, d'ailleurs, la plus petite racine, x', de $f(x)$.

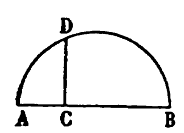
Pour que le problème ait deux solutions, il faut et il suffit qu'on ait simultanément

$$(2) \qquad 4ac - b^2 \leqslant 0, \qquad af(\alpha) > 0, \qquad -\frac{b}{2a} < \alpha.$$

Les coefficients a, b, c de $f(x)$ dépendent des données $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ du problème. Choisissons arbitrairement l'une de ces données, λ par exemple, et résolvons par rapport à λ les différentes inéquations. En résolvant l'inéquation (1), on verra entre quelles limites doit être comprise λ pour que le problème ait une solution unique; s'il arrive que cette inéquation n'ait aucune solution, on en conclut que le problème, s'il est possible, a deux solutions. En résolvant le système des inéquations (2), on verra entre quelles limites doit être comprise λ pour que le problème ait deux solutions; si, par hasard, l'une de ces inéquations n'a aucune solution, ou encore si elles n'ont pas de solution commune, on en conclut que le problème ne saurait avoir plus d'une solution. Ajoutons que, dans la résolutio simultanée de ces inéquations, il est avantageux de commence par celles qui sont du moindre degré en λ. Enfin, pour résume la discussion, on range par ordre de grandeur croissante le valeurs *remarquables* de λ; ce qui précède permet de dire com

bien, λ étant comprise entre deux consécutives de ces valeurs, le problème admet de solutions. Cela s'appelle *discuter le problème par rapport à* λ.

125. Premier exemple. — Soit AB un demi-cercle de rayon R. Trouver sur le diamètre AB un point C tel que, CD étant la demi-corde perpendiculaire à AB, la somme $AC + CD$ ait une valeur donnée l. Discuter le problème par rapport à l.



Prenons pour inconnue x la longueur AC. On a

$$CD = \sqrt{x(2R - x)},$$

de sorte que l'équation du problème est

$$x + \sqrt{x(2R - x)} = l.$$

Elle est de la forme

$$P + \sqrt{Q} = 0.$$

Ses racines seront donc celles de l'équation

$$(l - x)^2 - x(2R - x) = 0,$$

dont nous désignerons le premier membre par $f(x)$, qui vérifient l'inéquation

$$l - x > 0 \qquad \text{ou} \qquad x < l.$$

Nous avons bien affaire à un problème de la première classe, car les conditions $0 < x < 2R$, fournies par la géométrie, sont sûrement remplies par toute racine de l'équation $f(x) = 0$: x_1 étant une telle racine, on a, en effet,

$$x_1(2R - x_1) = (l - x_1)^2,$$

d'où

$$x_1(2R - x_1) > 0,$$

et par suite

$$0 < x_1 < 2R.$$

Ceci posé, appliquons la méthode générale. On a, dans le cas actuel,

$$a = 2, \qquad f(l) = -l(2R - l).$$

Pour que le problème admette une solution unique, il faut et il suffit qu'on ait

$$-l(2R-l)<0, \qquad \text{ou} \qquad l<2R.$$

Pour qu'il en admette deux, il faut et il suffit, le trinome $f(x)$ ordonné s'écrivant $2x^2-2(R+l)x+l^2$, qu'on ait simultanément :

$$2l^2-(R+l)^2 \leqslant 0, \qquad -l(2R-l)>0, \qquad \frac{R+l}{2}<l.$$

La première de ces inéquations, mise sous la forme

$$(l\sqrt{2}+R+l)(l\sqrt{2}-R-l) \leqslant 0,$$

donne

$$l \leqslant R(\sqrt{2}+1).$$

La seconde donne

$$l>2R.$$

La troisième enfin donne la condition $l>R$, qui est une conséquence de la précédente. Restent les deux conditions

$$l \leqslant R(\sqrt{2}+1) \qquad \text{et} \qquad l>2R,$$

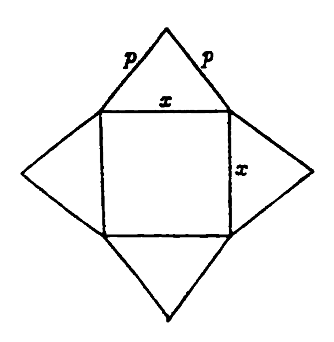
qui ne sont pas incompatibles, puisque $2R$ est inférieur à $R(\sqrt{2}+1)$.

En résumé, on a le tableau suivant, où x' désigne la plus petite racine de $f(x)$ et x'' la plus grande :

l	0		2R		$R(\sqrt{2}+1)$	
	$x'=0$ convient seule	1 solution x'	$x'=R$ $x''=2R$	2 solutions	$x'=x''$ $=R+\frac{R\sqrt{2}}{2}$	aucune solution

Remarque. — Au problème précédent se rattache la question que voici : en quel point C de AB faut-il mener la perpendiculaire à AB pour que la somme $AC+CD$ soit la plus grande possible ? Le point répondant à la question est à une distance $R+\frac{R\sqrt{2}}{2}$ du point A ; il est facile à construire géométriquement.

126. Deuxième exemple. — Sur les quatre côtés d'un carré comme bases, extérieurement à lui, on construit des triangles isocèles égaux dont les côtés égaux ont pour valeur p. Déterminer le côté x du carré de manière que l'octogone ainsi obtenu ait pour surface a^2. Discuter par rapport à a^2.



On voit immédiatement que l'aire de cet octogone a pour expression $x^2 + x\sqrt{4p^2 - x^2}$. L'équation du problème est donc

$$x\sqrt{4p^2 - x^2} = a^2 - x^2.$$

On sait que les racines de cette équation sont celles de l'équation

$$x^2(4p^2 - x^2) = (a^2 - x^2)^2$$

qui vérifient l'inéquation $x^2 < a^2$. Or cette dernière équation est bicarrée. Pour la résoudre, prenons pour inconnue auxiliaire $x^2 = y$, et résolvons l'équation du second degré

$$(a^2 - y)^2 - y(4p^2 - y) = 0,$$

dont nous désignerons le premier membre par $f(y)$. Cette équation a le même nombre de racines positives que l'équation bicarrée. La géométrie nous apprend que l'inconnue x doit satisfaire à la condition $x < 2p$, et que, par conséquent, l'inconnue y doit satisfaire à la condition $y < 4p^2$; mais on voit aisément, comme dans l'exemple précédent, que toute solution de l'équation $f(y) = 0$ satisfait à la double condition $0 < y < 4p^2$. En définitive, le nombre des solutions du problème est égal au nombre des racines de l'équation

$$f(y) = 0$$

qui vérifient l'inéquation

$$y < a^2.$$

Ici on a

$$f(a^2) = -a^2(4p^2 - a^2),$$

et, comme le coefficient de y^2 dans $f(y)$ est positif, l'unique

condition pour qu'il y ait une solution et une seule est

$$4p^2 - a^2 > 0, \qquad \text{ou} \qquad a^2 < 4p^2.$$

Le trinome $f(y)$ ordonné s'écrit

$$2y^2 - 2(2p^2 + a^2)y + a^4,$$

et, pour qu'il y ait deux solutions, il faut et il suffit qu'on ait simultanément :

$$2a^4 - (2p^2 + a^2)^2 \leqslant 0, \qquad 4p^2 - a^2 < 0, \qquad \frac{2p^2 + a^2}{2} < a^2.$$

La première de ces inéquations s'écrit

$$(a^2\sqrt{2} + 2p^2 + a^2)(a^2\sqrt{2} - 2p^2 - a^2) \leqslant 0$$

et donne

$$a^2 \leqslant 2p^2(\sqrt{2} + 1).$$

La seconde donne

$$a^2 > 4p^2.$$

La troisième donne la condition $a^2 > 2p^2$, qui est une conséquence de la précédente. Restent les deux conditions

$$a^2 \leqslant 2p^2(\sqrt{2} + 1) \qquad \text{et} \qquad a^2 > 4p^2,$$

qui sont compatibles, car $4p^2$ est moindre que $2p^2(\sqrt{2} + 1)$.

En résumé, on a le tableau suivant :

a^2	0		$4p^2$		$2p^2(\sqrt{2}+1)$	
	$x' = 0$	1 solution x'	$x' = p\sqrt{2}$ $x'' = 2p$	2 solutions	$x' = x''$ $= p\sqrt{2+\sqrt{2}}$	aucune solution

y' étant la plus petite racine de $f(y)$ et y'' la plus grande, on a désigné par x' et par x'' les nombres positifs $\sqrt{y'}$ et $\sqrt{y''}$.

Remarque. — Au problème précédent se rattache la question que voici : quel côté faut-il donner à un carré pour que l'octogone obtenu en construisant sur les côtés de ce carré des triangles isocèles dont les côtés égaux ont pour valeur p ait la plus grande surface possible ? — Il faut prendre le côté du carré égal à $p\sqrt{2 + \sqrt{2}}$. Il est aisé de démontrer que l'octogone correspondant est régulier.

Deuxième classe de problèmes.

127. Supposons maintenant que l'inconnue x soit assujettie à satisfaire à l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, $(a \neq 0)$, — dont nous désignerons le premier membre par $f(x)$, — et, en outre, à être d'une part supérieure à des nombres $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$, d'autre part inférieure aux nombres $\beta, \beta', \beta'', \ldots$. Soit α le plus grand des nombres $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$, et β le plus petit des nombres $\beta, \beta', \beta'', \ldots$ (¹). Le problème n'est évidemment possible que si l'on a $\alpha < \beta$. Cette condition étant remplie, il y a autant de solutions que de nombres x vérifiant l'équation

$$f(x) = 0$$

et la double inéquation

$$\alpha < x < \beta.$$

En appliquant des résultats connus, on arrive aux énoncés suivants :

Pour qu'il y ait une solution et une seule, il faut et il suffit que l'on ait

$$(1) \qquad f(\alpha)f(\beta) < 0.$$

La solution unique est d'ailleurs la plus petite racine, x', de $f(x)$, ou la plus grande racine, x'', suivant que le produit $af(\alpha)$ est positif ou négatif.

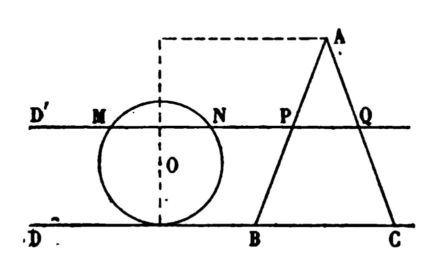
Pour qu'il y ait deux solutions, il faut et il suffit qu'on ait simultanément les cinq inégalités

$$(2) \quad 4ac - b^2 \leqslant 0, \quad af(\alpha) > 0, \quad af(\beta) > 0, \quad \alpha < -\frac{b}{2a} < \beta.$$

Comme précédemment, on discute le problème par rapport à la donnée λ en résolvant par rapport à cette donnée, d'abord l'inéquation (1), puis le système des inéquations (2).

(¹) Les nombres $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ dépendent des données. Il peut arriver que le plus grand de ces nombres ne soit pas toujours le même ; que, par exemple, ce soit α pour certains systèmes de valeurs des données, et que, pour d'autres systèmes, ce soit α'. De même, il peut se faire que le plus petit des nombres $\beta, \beta', \beta'', \ldots$ ne soit pas toujours le même.

128. Exemple. — Soit une droite D à laquelle est tangent un cercle O de rayon R. Sur cette droite repose un triangle ABC, situé du même côté de la droite que le cercle, de base $BC = a$, et de hauteur 3R. A quelle distance x de la droite D faut-il mener une droite D′ parallèle à D pour que, M, N étant les points d'intersection de D′ avec le cercle, et P, Q ses points d'intersection avec AB, AC, la somme $\overline{MN}^2 + \overline{PQ}^2$ ait une valeur donnée k^2 ? Discuter le problème par rapport à k^2.



Il est facile de trouver l'équation du problème. On a, en effet,

$$\overline{MN}^2 = 4x(2R - x), \qquad \frac{PQ}{a} = \frac{3R - x}{3R}.$$

L'équation cherchée est donc

$$36R^2x(2R - x) + a^2(3R - x)^2 - 9k^2R^2 = 0.$$

L'inconnue x doit satisfaire en outre à la double condition

$$0 < x < 2R :$$

c'est donc bien à un problème de la seconde classe qu'on a affaire.

En désignant par $f(x)$ le premier membre de l'équation précédente, on a

$$f(0) = 9R^2(a^2 - k^2), \qquad f(2R) = R^2(a^2 - 9k^2).$$

Pour que le problème admette une solution unique, il faut et il suffit qu'on ait

$$(a^2 - k^2)(a^2 - 9k^2) < 0,$$

inéquation du second degré en k^2 qui donne aussitôt

$$\frac{a^2}{9} < k^2 < a^2.$$

Supposons remplie cette double condition. Appelons x' la plus petite racine de $f(x)$ et x'' la plus grande. Le nombre $f(0)$ est

positif. Si donc le coefficient de x^2 dans $f(x)$, $a^2 - 36R^2$, est positif, on a

$$0 < x < 2R < x'',$$

et la racine x' seule convient; si $a^2 - 36R^2$ est négatif, on a

$$x' < 0 < x'' < 2R,$$

et c'est la racine x'' qui convient.

Le trinome $f(x)$ ordonné s'écrit

$$(a^2 - 36R^2)x^2 - 6R(a^2 - 12R^2)x + 9R^2(a^2 - k^2),$$

et, pour que le problème admette deux solutions, il faut et il suffit qu'on ait simultanément :

$$(1) \qquad (a^2 - 36R^2)(a^2 - k^2) - (a^2 - 12R^2)^2 \leqslant 0,$$

$$(2) \qquad (a^2 - 36R^2)(a^2 - k^2) > 0,$$

$$(3) \qquad (a^2 - 36R^2)(a^2 - 9k^2) > 0,$$

$$(4) \qquad 0 < \frac{3R(a^2 - 12R^2)}{a^2 - 36R^2} < 2R.$$

Considérons les inéquations (4), qui ne renferment pas k^2; la seconde peut s'écrire

$$\frac{3R(a^2 - 12R^2) - 2R(a^2 - 36R^2)}{a^2 - 36R^2} \quad \text{ou} \quad \frac{R(a^2 + 36R^2)}{a^2 - 36R^2} < 0.$$

On doit donc avoir $a^2 < 36R^2$. Dès lors la première donne la condition $a^2 < 12R^2$, qui entraine la précédente.

Les inéquations (2) et (3) donnent ensuite $k^2 > a^2$, $k^2 > \frac{a^2}{9}$; il suffit de garder la condition $k^2 > a^2$.

Enfin l'inéquation (1) est du premier degré par rapport à k^2; le coefficient de k^2 dans le premier membre est > 0 : l'inéquation aura donc lieu pour les valeurs de k^2 inférieures ou égales à un certain nombre A.

En résumé, on doit avoir

$$a^2 < 12R^2, \qquad k^2 > a^2, \qquad k^2 \leqslant A.$$

Ces deux dernières conditions ne sont compatibles que si a^2 est inférieur à A. Or, rappelons-nous que $k^2 < A$ est la condition pour que $f(x)$ ait deux racines distinctes, pourvu que

a^2 soit $< 36R^2$. Pour $k^2 = a^2$, les racines de $f(x)$ sont 0 et $\frac{6R(a^2 - 12R^2)}{a^2 - 36R^2} = B$. Elles sont distinctes, si a^2 est différent de $12R^2$. Donc a^2 est inférieur à A sous les deux conditions $a^2 < 36R^2$, $a^2 \neq 12R^2$, qui sont remplies, puisque nous supposons $a^2 < 12R^2$.

Ce raisonnement est très utile dans beaucoup de cas, mais, dans le cas actuel, l'inégalité $a^2 < A$ résultait immédiatement de l'expression de A, à savoir

$$A = \frac{(a^2 - 12R^2)^2 + a^2(36R^2 - a^2)}{36R^2 - a^2}.$$

En résumé, on a le tableau suivant, où x' désigne la plus petite racine de $f(x)$ et x'' la plus grande :

1° $a^2 < 12R^2$.

k^2		$\frac{a^2}{9}$		a^2		A	
	aucune solution.	$x'' = 2R$	une solution x''.	$x' = 0$ $x'' = B$	deux solutions.	$x' = x'' = \frac{B}{2}$	aucune solution.

2° $12R^2 < a^2 < 36R^2$.

k^2		$\frac{a^2}{9}$		a^2	
	aucune solution.	$x'' = 2R$	une solution x''.	$x'' = 0$	aucune solution.

3° $a^2 > 36R^2$.

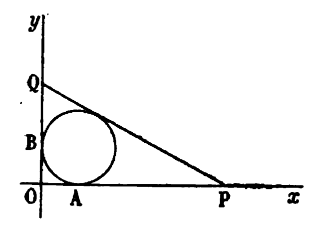
k^2		$\frac{a^2}{9}$		a^2	
	aucune solution.	$x' = 2R$	une solution x'.	$x' = 0$	aucune solution.

EXERCICES

1. Étant donné un carré de côté a, on prend, sur les côtés de ce carré, à partir de chaque sommet, et dans le même sens, des longueurs égales à x. Les extrémités de ces longueurs sont les sommets d'un nouveau carré. Calculer x de façon que ce nouveau carré ait une surface donnée S.

$x = \frac{-a+\sqrt{2S-a^2}}{2}$

2. On donne deux côtés b, c d'un triangle ; calculer le troisième côté x de façon que le triangle soit équivalent au triangle équilatéral de côté x. On supposera $b \geqslant c$ et on discutera par rapport à b. Trouver les angles du triangle correspondant à la plus grande valeur possible de b. Solution géométrique.

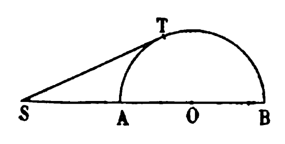


3. Étant donné un cercle de rayon R et deux tangentes rectangulaires Ox, Oy, mener une tangente PQ telle que le cercle soit inscrit dans le triangle OPQ et que le périmètre de ce triangle soit égal à $2p$. Discuter. On prendra pour inconnues $AP = x$, $BQ = y$.

$y = p - R - x$; $x = (p + R - \sqrt{R^2 - 6Rp + p^2}) : 2$

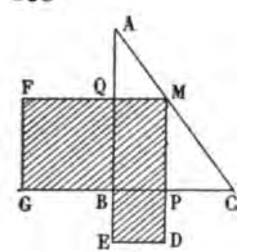
4. Calculer les côtés d'un triangle isocèle connaissant la médiane et la hauteur issues d'un des sommets de la base.

5. Étant donné un demi-cercle de rayon R limité par un diamètre AB, trouver, sur le prolongement de OA, un point S tel que, en menant de S la tangente ST, la surface latérale du cône engendré par ST plus cinq fois la surface de la zone engendrée par l'arc TB, quand on fait tourner la figure autour de AB, soit égale à $2\pi Rm$.

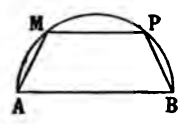


6. Une sphère de rayon a est posée sur un plan. Un cône de révolution dont le rayon de base est R et la hauteur $2a$ repose sur le même plan. A quelle distance x du plan donné faut-il mener un plan parallèle pour que les portions du cône et de la sphère comprises entre les deux plans soient équivalentes ?

7. Calculer les côtés d'un triangle connaissant son périmètre $2p$, le produit de deux côtés, m^2, et sachant que les médianes relatives à ces côtés se coupent à angle droit. ?

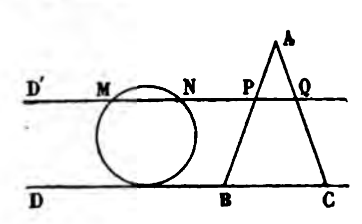


8. Étant donné un triangle rectangle ABC dont les côtés sont $3a$, $4a$, $5a$, trouver, sur l'hypoténuse, un point M tel que, si on mène les perpendiculaires MP, MQ sur les côtés de l'angle droit, et si on construit, en dehors du triangle, les carrés BPDE, BQFG, l'aire de l'hexagone MFGBED soit égale à k^2. Discuter par rapport à k^2.



9. Étant donné un demi-cercle de rayon R, trouver un point M du demi-cercle tel que si on mène AM, la parallèle MP à AB, enfin la droite PB, la somme $\overline{AM}^2 + \overline{MP}^2 + \overline{PB}^2$ ait une valeur donnée.

10. Soit une droite D à laquelle est tangent un cercle de rayon R ; soit en outre B et C deux points situés sur D et tels que $BC = 2R$; soit enfin A un point situé à une distance h de D et du même côté de D que le cercle. A quelle distance, x, de la droite D faut-il mener une droite D' parallèle à D, pour que, M et N étant les points d'intersection de D' avec le cercle, et P et Q ses points d'intersection avec les droites AB, AC, la somme $\overline{MN}^2 + \overline{PQ}^2$ soit égale à $4k^2$?



11. On donne un triangle ABC ; trouver un point O, à l'intérieur de ce triangle, tel que les trois angles BOC, COA, AOB soient égaux.

Inconnues : $OA = x$, $OB = y$, $OC = z$.

Discuter et retrouver les résultats donnés par la géométrie.

12. Soit $AA' = a$, $BB' = b$ les bases d'un trapèze rectangle dont la hauteur $A'B' = c$; on prend sur A'B' le point M tel que $\frac{MA'}{MB'}$ soit égal à $\frac{a}{b}$, et on demande :

1° De calculer la surface du triangle AMB;

2° De calculer le volume engendré par ce triangle en tournant autour de A'B' ;

3° De déterminer a, b, c de manière que l'angle AMB soit droit, que la surface du triangle AMB ait une valeur donnée m^2, et que le volume engendré par le triangle AMB ait une valeur donnée $\frac{2}{3}\pi n^3$.

13. Déterminer les dimensions x, y d'un rectangle ABCD de manière que le volume qu'il engendre en tournant autour de la droite AH perpendicu-

laire à la diagonale AC ait une valeur donnée $2\pi m^3$, et de manière que le volume qu'il engendre en tournant autour de AK, parallèle à BD, ait une valeur donnée $2\pi n^3$.

Application : $m^3 = 780, \qquad n^3 = \frac{3600}{13}.$

14. Calculer les côtés de l'angle droit x et y et l'hypoténuse z d'un triangle rectangle, connaissant : 1° le volume, $\frac{1}{3}\pi a^3$, engendré par le triangle en tournant autour de l'hypoténuse ; 2° la somme des volumes, $\frac{1}{3}\pi b^3$, engendrés par le triangle en tournant successivement autour des deux côtés de l'angle droit.

Application numérique : $a^3 = \frac{144}{5}, \qquad b^3 = 84.$

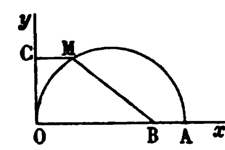
15. Calculer la hauteur x et les deux bases y et z d'un trapèze rectangle, connaissant : 1° le quatrième côté, l ; 2° l'aire du trapèze, a^2 ; 3° le volume $\frac{4}{3}\pi b^3$ engendré par le trapèze en tournant autour du quatrième côté. Discussion.

Exemples : $l = a, \qquad l = 3a.$

16. Étant donné deux axes rectangulaires $x'x$, $y'y$ qui se coupent en O et un point A sur la bissectrice de l'angle $x\text{O}y$ $(\text{OA} = a\sqrt{2})$, mener par A une droite telle que, B et C étant les points de rencontre de cette droite avec $x'x$ et $y'y$, BC ait une longueur donnée l.

On prendra pour inconnues $\overline{\text{OB}} = x$, $\overline{\text{OC}} = y$, et on discutera par rapport à l. Construction géométrique.

17. Soit $x\text{O}y$ un angle droit; soit A et B deux points situés sur Ox : OA $= 24a$, OB $= 21a$. On considère le demi-cercle décrit sur OA comme diamètre, et on demande de trouver sur ce demi-cercle un point M tel qu'en menant MC perpendiculaire sur Oy, la somme MB + MC soit égale à une longueur donnée l.



18. Soit A et B deux points situés sur une demi-droite Ox : OA $=$ AB $= a$. Déterminer sur Ox un point C tel que la somme ou la différence des longueurs des tangentes menées de O aux cercles qui ont pour centre le point C et pour rayons CA et CB soit égale à une longueur donnée.

O A B C x

19. Soit OAB un triangle rectangle en O ; soit AA′, BB′ les bissectrices intérieures des angles aigus A, B. On demande de calculer les côtés

$OA = x$, $OB = y$, $AB = z$ de ce triangle connaissant les longueurs $OA' = a$, $OB' = b$, et de démontrer le résultat suivant :

En supposant entiers les nombres a, b, pour que les nombres x, y, z soient aussi entiers, il faut et il suffit que l'un des nombres a, b soit de la forme $2p^2(q-p)(2p-q)m$, l'autre étant de la forme $q^2(q-p)(2p-q)m$; p, q, m sont des nombres entiers positifs vérifiant la condition

$$2p > q > p.$$

CHAPITRE IV

GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS
FONCTIONS ÉLÉMENTAIRES

---

129. Supposons qu'on ait réparti tous les nombres rationnels, positifs ou négatifs, ainsi que le nombre zéro, en deux classes, et cela de manière que : 1° tout nombre α de la première classe soit moindre que tout nombre α' de la seconde classe ; 2° il n'y ait, ni dans la première classe de nombre supérieur à tous les autres, ni dans la seconde classe de nombre inférieur à tous les autres. Dans ces conditions, il existe un nombre irrationnel (et un seul) supérieur à tous les nombres α et inférieur à tous les nombres α'.

En effet, si zéro appartient à la première classe, supprimons, dans cette classe, tous les nombres négatifs ; il restera une séparation en deux classes de l'ensemble des nombres rationnels positifs, séparation qui définit un nombre irrationnel positif a. Ce nombre répond à la question, et il est le seul.

Si, au contraire, zéro appartient à la seconde classe, supprimons, dans cette classe, tous les nombres positifs, puis changeons les signes de tous les nombres restants et échangeons les deux classes. Nous obtiendrons encore une séparation en deux classes de l'ensemble des nombres rationnels positifs, définissant un nombre irrationnel positif a. Le nombre négatif $-a$ répond à la question, et il est le seul.

Soit a, b deux nombres quelconques. Appelons α, β deux nombres rationnels respectivement inférieurs à a et à b, et

α', β' deux nombres rationnels respectivement supérieurs à a et à b. Le nombre $a+b$ est évidemment supérieur à tous les nombres $\alpha+\beta$ et inférieur à tous les nombres $\alpha'+\beta'$.

Réciproquement, tout nombre rationnel γ moindre que $a+b$ est la somme d'un nombre rationnel moindre que a et d'un nombre rationnel moindre que b. Il existe, en effet, deux nombres rationnels α, β tels qu'on ait

$$\alpha < a, \qquad a-\alpha < \frac{a+b-\gamma}{2},$$

$$\beta < b, \qquad b-\beta < \frac{a+b-\gamma}{2},$$

d'où

$$a+b-(\alpha+\beta) < a+b-\gamma,$$

ou

$$\gamma < \alpha+\beta,$$

ou enfin

$$\gamma-\alpha < \beta.$$

Le nombre γ est donc la somme du nombre rationnel $\alpha < a$ et du nombre rationnel $\gamma-\alpha < \beta < b$. C'est ce qu'il fallait démontrer.

On démontre de même que tout nombre rationnel γ' supérieur à $a+b$ est la somme d'un nombre rationnel supérieur à a et d'un nombre rationnel supérieur à b.

On appelle *valeur approchée d'un nombre a à $\frac{1}{p}$ près, par défaut* (p étant entier positif), la plus grande fraction ayant pour dénominateur p et pour numérateur un nombre entier (positif ou négatif) qui ne soit pas supérieure à a; de sorte que, q étant ce numérateur, on ait la double inégalité

$$\frac{q}{p} \leqslant a < \frac{q+1}{p}.$$

De même la plus petite fraction ayant pour dénominateur p et pour numérateur un nombre entier qui ne soit pas inférieure à a est, par définition, *la valeur approchée de a à $\frac{1}{p}$ près, par excès*.

I. — PROGRESSIONS

130. Si à chaque nombre entier positif n on fait correspondre un nombre u_n, on dit que u_n est une *fonction de la variable entière et positive* n. Soit u_n une telle fonction. Supposons qu'il existe un nombre u possédant la propriété suivante : quel que soit le nombre positif ε, il y a un nombre entier positif r tel que

$$u_{r+1},\ u_{r+2},\ \ldots$$

soient compris entre $u-\varepsilon$ et $u+\varepsilon$. En d'autres termes, l'inégalité $n > r$ entraîne la double inégalité

$$u-\varepsilon < u_n < u+\varepsilon,$$

ou encore l'inégalité

$$|u_n - u| < \varepsilon.$$

On dit alors que u_n *tend vers une limite quand n augmente indéfiniment*. Le nombre u s'appelle la *limite de u_n pour n infini ;* on dit encore que u_n *tend vers* u quand n augmente indéfiniment. D'après cette définition, si u_n tend vers u, $u_n - u$ tend vers 0, et réciproquement [1].

Supposons maintenant que, quel que soit le nombre positif A, il existe un nombre entier positif r tel que

$$u_{r+1},\ u_{r+2},\ \ldots$$

soient en valeur absolue supérieurs à A. En d'autres termes, l'inégalité $n > r$ entraîne l'inégalité

$$|u_n| > A.$$

On dit alors que u_n *augmente indéfiniment en même temps que* n [2]. Dans ces conditions, il peut arriver que, à partir d'une certaine valeur de n, u_n ait constamment le même signe : si

---

[1] Cette définition est légitime, car on voit aisément qu'il ne peut pas exister deux nombres u et v possédant la propriété énoncée.

[2] Dans ce cas, il est impossible que u_n tende vers une limite.

c'est le signe $+$, *u_n augmente indéfiniment par valeurs positives;* si c'est le signe $-$, *u_n augmente indéfiniment par valeurs négatives.*

Si, n augmentant indéfiniment, u_n tend vers u, au_n (a étant un nombre quelconque) *tend vers au.* C'est évident si a est égal à 0. Supposons $a \neq 0$. Soit ε un nombre positif quelconque. Il existe, par hypothèse, un nombre entier positif r tel que l'inégalité $n > r$ entraîne l'inégalité

$$| u_n - u | < \frac{\varepsilon}{| a |}, \quad \text{ou} \quad | au_n - au | < \varepsilon.$$

C'est dire que au_n tend vers au.

Si u_n augmente indéfiniment en même temps que n, il en est de même de au_n, pourvu que le nombre a soit $\neq 0$. Soit A un nombre positif quelconque. Il existe, par hypothèse, un entier positif r tel que l'inégalité $n > r$ entraîne l'inégalité

$$| u_n | > \frac{A}{| a |}, \quad \text{ou} \quad | au_n | > A.$$

Donc au_n augmente indéfiniment en même temps que n.

Si u_n, v_n, w_n tendent respectivement vers u, v, w, la somme $u_n + v_n + w_n$ tend vers $u + v + w$. Soit ε un nombre positif quelconque. Il existe, par hypothèse, un entier positif r tel que l'inégalité $n > r$ entraîne les inégalités

$$| u_n - u | < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad | v_n - v | < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad | w_n - w | < \frac{\varepsilon}{3}.$$

$$| u_n - u | + | v_n - v | + | w_n - w | < \varepsilon,$$

et par suite

$$| u_n + v_n + w_n - (u + v + w) | \leqslant | u_n - u | + | v_n - v | + | w_n - w | < \varepsilon.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

Dans les mêmes conditions, la somme $au_n + bv_n + cw_n$ (a, b, c étant des nombres quelconques) tend vers $au + bv + cw$.

131. Soit u_1, u_2, u_3, ... les valeurs d'une fonction u_n de la

variable entière et positive n pour les valeurs $1, 2, 3, \ldots$ de la variable; la suite de ces valeurs s'appelle une *série*. $u_1, u_2, u_3, \ldots$ sont les *termes* de la série; u_n en est le *terme général*. La somme S_n des n premiers termes est une nouvelle fonction de n. Si, n augmentant indéfiniment, S_n tend vers une limite S, la série est dite *convergente*, et le nombre S s'appelle *la somme de la série*. Dans le cas contraire, la série est dite *divergente*.

Les deux séries

$$(1) \qquad u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots,$$

$$(2) \qquad au_1, au_2, \ldots, au_n, \ldots,$$

a étant un nombre *non nul*, sont *de même nature*, c'est-à-dire sont toutes deux convergentes ou toutes deux divergentes. Car, S_n et Σ_n étant les sommes des n premiers termes de ces deux séries, on a

$$\Sigma_n = aS_n, \qquad \text{d'où} \qquad S_n = \frac{\Sigma_n}{a}.$$

Si donc, n augmentant indéfiniment, S_n tend vers une limite S, Σ_n tend vers une limite égale à aS; réciproquement, si Σ_n tend vers une limite Σ, S_n tend vers une limite égale à $\frac{\Sigma}{a}$. La convergence de la série (1) entraîne donc celle de la série (2), et réciproquement; par cela même, la divergence de la série (1) entraîne celle de la série (2), et réciproquement.

Considérons plusieurs séries convergentes :

$$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots;$$
$$v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n, \ldots;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Soit U, V, ... leurs sommes respectives. La série

$$w_1, w_2, w_3, \ldots, w_n, \ldots,$$

avec

$$w_n = u_n + v_n + \cdots,$$

est convergente et a pour somme $U + V + \cdots$. En effet, si l'on appelle $U_n, V_n, \ldots, W_n$ les sommes des n premiers termes

de ces séries, on a évidemment

$$W_n = U_n + V_n + \cdots.$$

n croissant indéfiniment, U_n, V_n, ... tendent respectivement vers U, V, ... : donc W_n tend vers une limite égale à $U + V + \cdots$.

On conclut de ce qui précède que la série

$$w_1, w_2, w_3, \ldots, w_n, \ldots,$$

avec

$$w_n = au_n + bv_n + \cdots$$

(a, b, ... étant des nombres quelconques), est convergente et a pour somme $aU + bV + \cdots$.

132. Voici un théorème qui permet, dans un grand nombre de cas, de reconnaître qu'une série n'est pas convergente :

Le terme général u_n d'une série convergente tend vers zéro quand n augmente indéfiniment.

Car on a, en appelant S_n la somme des n premiers termes et S la somme de la série :

$$u_n = S_n - S_{n-1} = (S_n - S) + (S - S_{n-1}).$$

Soit ε un nombre positif quelconque. Il existe, par hypothèse, un nombre entier positif r tel que, pour $n > r$, on ait

$$|S_n - S| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Supposons $n > r + 1$, ou $n - 1 > r$; alors on a à la fois

$$|S_n - S| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad |S_{n-1} - S| < \frac{\varepsilon}{2};$$

et par suite

$$|u_n| \leqslant |S_n - S| + |S_{n-1} - S| < \varepsilon,$$

ce qui démontre le théorème.

Ainsi, toutes les fois que u_n ne tend pas vers zéro quand n augmente indéfiniment, on peut affirmer que la série est divergente.

133. *Si les termes d'une série*

$$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$$

ne vont jamais en diminuant et restent inférieurs à un nombre P, *le terme général tend vers une limite* A *au plus égale à* P.

On a, par hypothèse,

$$u_1 \leqslant u_2 \leqslant u_3 \leqslant \ldots \leqslant u_n \leqslant \ldots,$$

et

$$u_n < P$$

quel que soit n. Le théorème est évident dans le cas particulier où, à partir d'un certain rang, tous les termes de la série sont égaux. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Partageons l'ensemble des nombres rationnels en deux classes de la manière suivante : nous mettrons dans la seconde classe tous les nombres supérieurs à u_n quel que soit n ; tels sont tous les nombres rationnels supérieurs à P. La première classe contiendra les nombres rationnels restants : chacun d'eux est inférieur à un certain terme u_n de la série et à tous les termes suivants. Tout nombre de la première classe est évidemment inférieur à un nombre quelconque de la seconde. Il n'y a pas, dans la première classe, de nombre qui dépasse tous les autres : car, quel que soit le nombre rationnel α de cette classe, il y a un terme u_n de la série qui lui est supérieur, et alors tout nombre rationnel compris entre α et u_n appartient aussi à la première classe.

Si, dans la seconde classe, il y a un nombre plus petit que tous les autres, nous désignerons ce nombre par A. Dans le cas contraire, appelons A le nombre irrationnel supérieur à tous les nombres de la première classe et inférieur à tous les nombres de la seconde classe. Nous allons démontrer que le nombre A satisfait aux conditions de l'énoncé.

D'abord A est au plus égal à P, sans quoi tout nombre rationnel compris entre P et A appartiendrait à la première classe comme inférieur à A et serait supérieur à u_n quel que fût n, ce qui est contradictoire. Ensuite ce nombre A est supérieur à tous les termes de la série, car s'il était inférieur à l'un d'eux u_n, tout nombre rationnel compris entre A et u_n appartiendrait à la seconde classe comme supérieur à A tout en étant inférieur à u_n. Enfin u_n tend vers A lorsque n augmente indéfiniment : car, quel que soit le nombre positif ε, il existe

un nombre rationnel α compris entre $A - \varepsilon$ et A; ce nombre appartenant à la première classe, tous les termes de la série à partir d'un certain rang lui sont supérieurs, et ces termes diffèrent de A de moins de ε.

On démontre d'une manière analogue que, *si les termes d'une série ne vont jamais en augmentant et restent supérieurs à un nombre* Q, *le terme général tend vers une limite* B *au moins égale à* Q.

134. Si, dans une série à termes tous positifs, la somme S_n des n premiers termes reste inférieure à un nombre fixe, la série est convergente, d'après le théorème précédent, car S_n augmente en même temps que n. Dans le cas contraire, S_n augmente indéfiniment avec n, car, quel que soit le nombre positif A, il existe un nombre entier positif r tel que S_r soit plus grand que A; dès lors, les nombres S_{r+1}, S_{r+2}, ... seront tous plus grands que A.

1° PROGRESSIONS ARITHMÉTIQUES

135. Nous allons étudier deux classes simples de séries : les *progressions arithmétiques* et les *progressions géométriques.*

Une *progression arithmétique* est une série dont chaque terme s'obtient en ajoutant au précédent un même nombre appelé *raison.*

Il suffit, pour déterminer une progression arithmétique, de s'en donner le premier terme a et la raison r; dès lors, le 2e terme est égal à $a + r$, le 3e est égal à $a + 2r$, ..., le n^e est égal à $a + (n - 1)r$.

Comme exemples de progressions arithmétiques, citons la suite des nombres entiers

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots,$$

la suite des nombres pairs

$$2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots,$$

la suite des nombres impairs

$$1, 3, 5, \ldots, 2n-1, \ldots .$$

Les termes d'une progression arithmétique vont constamment en croissant si la raison est positive, constamment en décroissant si la raison est négative. Dans le premier cas, la progression est dite *croissante*; dans le second cas, elle est dite *décroissante*.

Le terme général u_n est constamment égal à a si la raison est nulle; il augmente indéfiniment avec n si la raison n'est pas nulle, et cela par valeurs positives ou par valeurs négatives, suivant que la raison est elle-même positive ou négative. En effet, soit A un nombre positif quelconque. Si r est >0, l'inégalité $a+(n-1)r>A$ sera vérifiée pour $n>\frac{A-a}{r}+1$; et si r est <0, l'inégalité $a+(n-1)r<-A$ sera vérifiée pour $n>\frac{-A-a}{r}+1$. La seule progression arithmétique qui soit une série convergente est donc celle où l'on a simultanément $a=0$, $r=0$.

136. Considérons maintenant une progression arithmétique *limitée*; appelons $a, b, c, \ldots, h, k, l$ ses différents termes; soit n le nombre de ces termes. Proposons-nous de démontrer l'égalité

$$a+b+c+\cdots+h+k+l=\frac{(a+l)n}{2}.$$

A cet effet, remarquons que *la somme de deux termes quelconques équidistants des termes extrêmes est égale à la somme des termes extrêmes*. Ainsi on a :

$$b=a+r, \quad k=l-r, \quad \text{d'où} \quad b+k=a+l;$$
$$c=a+2r, \quad h=l-2r, \quad \text{d'où} \quad c+h=a+l,$$

et ainsi de suite. Cela étant, si l'on pose

$$x=a+b+c+\cdots+h+k+l,$$

on a aussi

$$x=l+k+h+\cdots+c+b+a,$$

et par suite

$$2x=(a+l)+(b+k)+(c+h)+\cdots+(h+c)+(k+b)+(l+a).$$

Dans le second membre, les n sommes entre parenthèses sont égales à $a+l$; on a donc

$$2x=(a+l)n, \qquad \text{d'où} \qquad x=\frac{(a+l)n}{2}.$$

En appliquant cette formule aux deux progressions

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n;$$

$$1,\ 3,\ 5,\ \ldots,\ 2n-1,$$

on voit que :

1° La somme des n premiers nombres entiers est égale à $\frac{n(n+1)}{2}$;

2° La somme des n premiers nombres impairs est égale à n^2.

137. *Insérer n moyens arithmétiques entre deux nombres a et b*, c'est former une progression arithmétique de $n+2$ termes dont les extrêmes soient a et b. La raison r de cette progression est fournie par l'équation

$$b=a+(n+1)r, \qquad \text{d'où} \qquad r=\frac{b-a}{n+1},$$

et la progression cherchée est la suivante :

$$a,\quad a+\frac{b-a}{n+1},\quad a+2\frac{b-a}{n+1},\quad \ldots,\quad a+n\frac{b-a}{n+1},\quad b.$$

Pour $n=1$, on a $r=\frac{b-a}{2}$, et la progression se réduit à

$$a,\qquad a+\frac{b-a}{2}=\frac{a+b}{2},\qquad b.$$

C'est pourquoi on appelle *moyenne arithmétique de deux nombres* leur demi-somme. Par extension, on appelle *moyenne arithmétique de n nombres* le quotient par n de leur somme.

Soit $a, b, c, \ldots, k, l$ une progression arithmétique de $n+1$ termes. Si l'on insère $n'-1$ moyens entre a et b, $n'-1$ moyens entre b et c, ..., $n'-1$ moyens entre k et l, les

n progressions arithmétiques ainsi obtenues n'en formeront qu'une, car le dernier terme de chacune d'elles est le premier terme de la suivante, et leurs raisons,

$$\frac{b-a}{n'}, \qquad \frac{c-b}{n'}, \qquad \ldots, \qquad \frac{l-k}{n'},$$

sont égales. Cette progression unique comprendra $nn'-1$ termes entre a et l; on voit donc que, pour insérer $nn'-1$ moyens arithmétiques entre deux nombres a et b, on peut commencer par insérer $n-1$ moyens arithmétiques entre ces deux nombres, et insérer ensuite $n'-1$ moyens arithmétiques entre deux termes consécutifs quelconques de la progression obtenue par la première insertion de moyens.

2° PROGRESSIONS GÉOMÉTRIQUES

138. Lemme. — *Soit α un nombre plus grand que -1 et différent de zéro, et n un entier positif plus grand que 1 ; on a l'inégalité*

$$(1) \qquad (1+\alpha)^n > 1 + n\alpha.$$

En effet, cette inégalité est évidente pour $n = 2$, puisque $(1+\alpha)^2$ est égal à $1 + 2\alpha + \alpha^2$ et que α^2 est plus grand que zéro. En multipliant les deux membres de l'inégalité

$$(1+\alpha)^2 > 1 + 2\alpha$$

par le facteur positif $1+\alpha$, on obtient

$$(1+\alpha)^3 > (1+2\alpha)(1+\alpha),$$

ou

$$(1+\alpha)^3 > 1 + 3\alpha + 2\alpha^2,$$

et *a fortiori*

$$(1+\alpha)^3 > 1 + 3\alpha,$$

puisque $2\alpha^2$ est > 0.

On étendra de même la propriété au cas de $n = 4$, $n = 5$, ...

Théorème. — *L'expression q^n, où q est un nombre différent de ± 1, et n un entier positif, augmente indéfiniment en même temps que n, si q est en valeur absolue supérieur à 1, et tend*

vers zéro quand n augmente indéfiniment, si q est en valeur absolue inférieur à 1.

Supposons d'abord $|q| > 1$, et désignons par α le nombre positif $|q| - 1$. On a

$$|q^n| = (1 + \alpha)^n,$$

et par suite, en vertu du lemme précédent,

$$|q^n| > 1 + n\alpha.$$

Pour que $|q^n|$ soit $> A$, il suffit que $1 + n\alpha$ soit $> A$ ou que n soit $> \frac{A-1}{\alpha}\cdot$ Ajoutons que, si q est négatif, q^n est positif ou négatif, suivant que n est pair ou impair.

Supposons maintenant $|q| < 1$. Si q est nul, q^n est nul quel que soit n. Si q n'est pas nul, appelons q' son inverse $\frac{1}{q}\cdot$ On a $|q'| > 1$, et $q^n = \frac{1}{q'^n}\cdot$ L'inégalité $|q^n| < \varepsilon$ équivaut donc à celle-ci : $|q'^n| > \frac{1}{\varepsilon}$, et nous venons de voir que q'^n augmente indéfiniment en même temps que n.

139. On appelle *progression géométrique* une série dans laquelle chaque terme est égal au précédent multiplié par un facteur constant. Ce facteur est *la raison* de la progression.

Pour déterminer une progression géométrique, il suffit de s'en donner le premier terme a et la raison q : le 2e terme est dès lors égal à aq, le 3e à aq^2, ..., le n^e à aq^{n-1}.

Dans le cas particulier où les nombres a et q sont positifs, tous les termes sont positifs. Ils sont tous égaux à a si q est égal à 1; ils vont constamment en croissant si q est plus grand que 1, et la progression est dite *croissante*; ils vont constamment en décroissant si q est plus petit que 1, et la progression est dite *décroissante*.

Revenons au cas général, et supposons $a \neq 0$, $q \neq 0$. No[us] allons chercher ce que devient le n^e terme, aq^{n-1}, quand [n] augmente indéfiniment. Si d'abord q est supérieur à 1 e[n] valeur absolue, $aq^{n-1} = \frac{a}{q} \times q^n$ augmente indéfiniment e[n]

même temps que n. Ajoutons que, si q est positif, aq^{n-1} a constamment le signe de a, et que, si q est négatif, aq^{n-1} est alternativement positif et négatif. — Si maintenant q est inférieur à 1 en valeur absolue, aq^{n-1} tend vers zéro quand n augmente indéfiniment. — Enfin, pour $q = +1$, aq^{n-1} est égal à a, quel que soit n; pour $q = -1$, aq^{n-1} est alternativement égal à $+a$ et à $-a$. — Ainsi, pour $|q| \geqslant 1$, la progression est une série divergente; nous verrons tout à l'heure que, pour $|q| < 1$, elle est une série convergente.

140. Calculons la somme S_n des n premiers termes, en supposant $q \neq 1$ (pour $q = 1$, S_n est égale à na). On a

$$S_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1},$$

$$qS_n = aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + aq^n.$$

En retranchant membre à membre ces deux égalités, il vient

$$(q-1)S_n = aq^n - a,$$

d'où la formule

$$S_n = \frac{aq^n - a}{q-1}. \text{ [1]}$$

On peut l'écrire ainsi :

$$S_n = \frac{aq^{n-1} \times q - a}{q-1};$$

et comme aq^{n-1} est le dernier terme de la somme S_n, on voit que *la somme des termes d'une progression géométrique limitée dont le premier terme est a, dont le dernier terme est l, enfin dont la raison est q, a pour expression* $\frac{lq-a}{q-1}$. C'est cette formule qui est la plus commode dans la pratique.

Nous pouvons maintenant montrer que, si q est inférieur à 1 en valeur absolue, S_n *tend vers une limite* S *quand* n *croît indéfiniment, et que l'on a*

$$S = \frac{a}{1-q}.$$

---

[1] Cette formule peut encore s'établir en remarquant que l'on a

$$S_n = a(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}),$$

et que $1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}$ est le quotient de $q^n - 1$ par $q - 1$.

Formons en effet la différence $S - S_n$:

$$S - S_n = \frac{aq^n}{1-q}.$$

Elle tend vers zéro quand n augmente indéfiniment. Donc S_n tend vers S.

Ajoutons que la différence $S - S_n$ a constamment le signe de a si q est positif, tandis que, pour q négatif, elle est alternativement positive et négative. Dans le premier cas, S_n tend vers S par valeurs constamment inférieures à S ou constamment supérieures à S, suivant que a est positif ou négatif; dans le second cas, S_n tend vers S par valeurs alternativement inférieures et supérieures à S,

141. *Insérer n moyens géométriques entre deux nombres positifs a et b*; c'est former une progression géométrique de $n+2$ termes positifs dont les extrêmes soient a et b. La raison positive q de cette progression est donnée par l'équation

$$b = aq^{n+1}, \qquad \text{d'où} \qquad q = \sqrt[n+1]{\frac{b}{a}},$$

de sorte que la progression cherchée est la suivante :

$$a,\ a\sqrt[n+1]{\frac{b}{a}},\ a\sqrt[n+1]{\left(\frac{b}{a}\right)^2},\ \dots,\ a\sqrt[n+1]{\left(\frac{b}{a}\right)^n},\ b.$$

En particulier, pour $n = 1$, on a $q = \sqrt{\frac{b}{a}}$, et la progression se réduit à la suivante :

$$a,\ a\sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{ab},\ b.$$

C'est pourquoi on appelle *moyenne géométrique de deux nombres positifs* la racine carrée de leur produit; et, par extension, *moyenne géométrique de n nombres positifs* la racine $n^{\text{ième}}$ de leur produit.

Soit $a, b, c, \dots, k, l$ une progression géométrique contenant $n+1$ termes tous positifs ; insérons $n'-1$ moyens géométriques entre a et b, $n'-1$ moyens géométriques entre

et $c, \ldots,$ $n'-1$ moyens géométriques entre k et l. Toutes les progressions géométriques ainsi formées ont même raison, car on a

$$\sqrt[n']{\frac{b}{a}} = \sqrt[n']{\frac{c}{b}} = \cdots = \sqrt[n']{\frac{l}{k}}.$$

Elles ne forment donc qu'une seule progression commençant par a et finissant par l, et comprenant $nn'-1$ termes entre a et l. Ainsi, pour insérer $nn'-1$ moyens géométriques entre deux nombres positifs a et l, on peut commencer par insérer $n-1$ moyens géométriques entre ces deux nombres ; après quoi on insère $n'-1$ moyens géométriques entre deux termes consécutifs quelconques de la progression obtenue après la première insertion de moyens.

EXERCICES

1. Des égalités

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right],$$

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right]$$

conclure que les séries dont les $n^{\text{ièmes}}$ termes sont

$$\frac{1}{n(n+1)}, \qquad \frac{1}{n(n+1)(n+2)}, \qquad \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$$

sont convergentes. Trouver leurs sommes.

2. On pose $u_n = \dfrac{n^2+pn+q}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$: il existe un système et un seul de trois nombres A, B, C tels qu'on ait, quel que soit n,

$$u_n = \frac{A}{n(n+1)} + \frac{B}{n(n+1)(n+2)} + \frac{C}{n(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

Conclure de là que la série dont le terme général est u_n est convergente, et trouver sa somme.

3. Trouver une progression arithmétique dans laquelle la somme des

n premiers termes soit égale, quel que soit n, à $n(an+b)$, a et b étant deux nombres donnés. Application : $a = 4$, $b = 5$.

a+b, 3a+b, 5a+b ... 9, 17, 25 ...

4. Trouver une progression arithmétique de n termes, sachant que la somme des produits de chacun d'eux par le premier est égale à A, et que la somme des produits de chacun d'eux par le dernier est égale à B. Application : $n = 5$, $A = 105$, $B = 385$.

5. On considère la suite

$$a, \quad a+r, \quad a+2r, \quad \ldots\ldots,$$

et on forme un premier groupe avec a ; un second avec $a+r$, $a+2r$; un troisième avec $a+3r$, $a+4r$, $a+5r$, etc. : 1° trouver la somme des termes des n premiers groupes ; 2° trouver la somme des termes du $n^{\text{ième}}$ groupe. Application : $a = 1$, $r = 2$; conclure des résultats trouvés que la somme des cubes des n premiers nombres entiers est égale au carré de la somme de ces nombres.

6. Calculer les côtés d'un triangle, sachant qu'ils forment une progression arithmétique de raison d, et connaissant le rayon R du cercle circonscrit. Application : $d = 1$, $R = 2$.

7. Calculer les côtés d'un triangle, sachant qu'ils forment une progression arithmétique de raison r et que le rapport de la surface du triangle à celle du rectangle ayant pour dimensions les deux plus petits côtés, a une valeur donnée m. Discuter.

8. Peut-on déterminer la raison r d'une progression arithmétique de manière que le rapport de la somme des n premiers termes à la somme des n termes suivants soit indépendant de n ?

9. Les milieux des côtés d'un carré sont les sommets d'un second carré : de ce second carré on en déduit de la même manière un troisième, etc. Calculer la somme des aires des n premiers carrés ; trouver la limite de cette somme pour n infini.

Même question pour un triangle.

10. Démontrer que, α étant positif et $n > 2$, on a l'inégalité

$$(1+\alpha)^n > 1 + n\alpha + \frac{n(n-1)}{2}\alpha^2,$$

et en conclure que, si q est inférieur à 1 en valeur absolue, nq^n tend vers zéro quand n augmente indéfiniment.

11. Si q est inférieur à 1 en valeur absolue, la série dont le terme général est nq^n est convergente. Calculer sa somme.

II. — DÉFINITIONS ET THÉORÈMES CONCERNANT LES LIMITES ET LA CONTINUITÉ

142. Soit a, b deux nombres inégaux; supposons $a < b$. On appelle *intervalle* (a, b) l'ensemble formé par les nombres a, b, et par tous les nombres compris entre a et b; on dit de chacun de ces nombres qu'il *appartient* à l'intervalle (a, b); les nombres a, b s'appellent les *limites* de l'intervalle; a est la limite *inférieure*, b la limite *supérieure*. Le nombre positif $b - a$ est l'*amplitude* de l'intervalle.

Par analogie, nous appellerons *intervalle* $(-\infty$ [1], $a)$ l'ensemble formé par le nombre a et par tous les nombres inférieurs à a; *intervalle* $(a, +\infty)$ l'ensemble formé par le nombre a et par tous les nombres supérieurs à a; *intervalle* $(-\infty, +\infty)$ l'ensemble formé par tous les nombres.

Imaginons que, par un moyen quelconque, on fasse correspondre à chaque nombre x appartenant à un intervalle (a, b) un autre nombre y; on dit alors que *y est une fonction de la variable indépendante x définie dans l'intervalle* (a, b).

Si, par exemple, $f(x)$ est une expression algébrique ayant une valeur numérique déterminée y pour toutes les valeurs de x appartenant à l'intervalle (a, b), y est une fonction de x définie dans cet intervalle. Voici quelques exemples simples de fonctions définies de cette façon :

1° $$y = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}x + a_m$$

est une fonction de x définie dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$. On lui donne le nom de *fonction entière*.

2° $$y = \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0x^p + b_1x^{p-1} + \cdots + b_p}$$

est une fonction de x définie dans tout intervalle ne contenant aucune valeur qui annule le dénominateur. Une telle fonction

(1) Le signe ∞ s'énonce *l'infini*.

porte le nom de *fonction* ou *fraction rationnelle*. Ainsi la fonction

$$y = \frac{ax + b}{a'x + b'} \qquad (a' \neq 0)$$

est définie dans les deux intervalles

$$\left(-\infty,\ -\frac{b'}{a'} - \varepsilon\right), \qquad \left(-\frac{b'}{a'} + \varepsilon,\ +\infty\right),$$

ε étant un nombre positif qu'on peut supposer aussi petit qu'on veut. De même, considérons la fonction

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'} \qquad (a' \neq 0);$$

si $4a'c' - b'^2$ est plus grand que 0, elle est définie dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$; si $4a'c' - b'^2$ est égal à 0, elle est définie dans les deux intervalles

$$\left(-\infty,\ -\frac{b'}{2a'} - \varepsilon\right), \qquad \left(-\frac{b'}{2a'} + \varepsilon,\ +\infty\right);$$

si enfin $4a'c' - b'^2$ est plus petit que 0, elle est définie dans les trois intervalles

$$(-\infty,\ x' - \varepsilon), \qquad (x' + \varepsilon,\ x'' - \varepsilon), \qquad (x'' + \varepsilon,\ +\infty),$$

x' étant la plus petite racine du dénominateur et x'' la plus grande. Comme précédemment, ε est un nombre positif aussi petit qu'on veut.

3° $$y = \sqrt[m]{a_0x^p + a_1x^{p-1} + \cdots + a_p}$$

est une fonction de x définie dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ lorsque m est impair; lorsque m est pair, y est définie dans tout intervalle ne contenant aucune valeur qui rende négatif le polynome sous le radical. Ainsi la fonction

$$y = \sqrt{x - a}$$

est définie dans l'intervalle $(a, +\infty)$. La fonction

$$y = \sqrt{x^2 + px + q}$$

est définie dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$, si $4q - p^2$ est $\geqslant 0$; si $4q - p^2$ est < 0, elle est définie dans les deux

intervalles $(-\infty, x')$ et $(x'', +\infty)$, x' étant la plus petite racine du trinome x^2+px+q et x'' la plus grande.

143. Soit $f(x)$ une fonction définie dans un intervalle (a, b); s'il existe deux nombres A, B $(B < A)$ tels que, pour toutes les valeurs de x appartenant à l'intervalle (a, b), on ait la double inégalité

$$B < f(x) < A,$$

on dit que $f(x)$ est *finie* dans l'intervalle (a, b) [1].

Théorème. — *Si une fonction $f(x)$ est finie dans l'intervalle (a, b), il existe un système et un seul de deux nombres M et m [que nous appellerons respectivement sa limite supérieure et sa limite inférieure dans l'intervalle (a, b)] jouissant des propriétés suivantes :*

1° *Les valeurs de $f(x)$, quand x croît de a à b, ne dépassent jamais M; mais, quel que soit le nombre positif ε, l'une au moins de ces valeurs dépasse $M-\varepsilon$.*

2° *Les valeurs de $f(x)$, quand x croît de a à b, ne sont jamais inférieures à m; mais, quel que soit le nombre positif ε, l'une au moins de ces valeurs est inférieure à $m+\varepsilon$.*

Il est évident que le nombre M est unique, s'il existe. Pour en démontrer l'existence, partageons en deux classes l'ensemble des nombres rationnels de la manière suivante : la seconde classe comprendra les nombres rationnels auxquels la fonction $f(x)$ reste inférieure (exemple : tout nombre rationnel supérieur à A); la première classe comprend les nombres rationnels restants, de sorte que, quel que soit le nombre α de cette première classe, il existe dans l'intervalle (a, b) un nombre x_1 tel qu'on ait $f(x_1) \geqslant \alpha$. Tout nombre de la seconde classe surpasse tout nombre de la première. Cela étant, il y a trois cas possibles : ou bien la seconde classe comprend un nombre inférieur à tous les autres; ou bien la première classe comprend un nombre supérieur à tous les autres; ou bien enfin il n'y a, ni dans la seconde classe de nombre inférieur aux autres, ni dans la première classe de nombre supérieur aux autres. Nous appellerons M : dans le premier cas, le nombre de la seconde classe inférieur aux autres; dans le second cas, le nombre de la première classe supérieur aux autres; dans le troisième cas, le nombre irrationnel supérieur à tous les nombres de la première classe et inférieur à tous les nombres de la seconde classe. Tout nombre rationnel inférieur à M appartient à la première classe; tout nombre rationnel supérieur à M appartient à la seconde classe.

---

[1] Une fonction peut être définie dans un intervalle sans être finie dans cet intervalle.

x croissant de a à b, la fonction $f(x)$ ne peut dépasser M, car elle reste inférieure à tout nombre rationnel supérieur à M ; mais elle dépasse le nombre $M - \varepsilon$, quel que soit le nombre positif ε, puisqu'elle devient supérieure ou égale à tout nombre rationnel α compris entre $M - \varepsilon$ et M. Dans le cas où le nombre M appartient à la seconde classe, la fonction $f(x)$ reste inférieure à M ; lorsque M appartient à la première classe, $f(x)$ prend nécessairement la valeur M ; enfin lorsque le nombre M est irrationnel, on ne peut rien dire de général.

De même, il est évident que le nombre m est unique, s'il existe. Pour en démontrer l'existence, partageons en deux classes l'ensemble des nombres rationnels de la manière suivante : rangeons dans la première classe les nombres rationnels auxquels $f(x)$ reste supérieure, dans la seconde classe les nombres rationnels restants. Nous appellerons m, suivant les cas, le nombre de la première classe supérieur aux autres, ou le nombre de la seconde classe inférieur aux autres, ou enfin le nombre irrationnel supérieur à tous les nombres de la première classe et inférieur à tous les nombres de la seconde classe. x croissant de a à b, la fonction $f(x)$ ne devient jamais inférieure à m ; elle devient inférieure à $m + \varepsilon$, quel que soit le nombre positif ε ; enfin elle peut ne pas devenir égale à m.

La différence $M - m$ s'appelle l'*oscillation* de $f(x)$ dans l'intervalle (a, b).

Remarque. — Si l'on partage l'intervalle (a, b) en n intervalles partiels (a, c_1), (c_1, c_2), ... (c_{n-1}, b), et si l'on appelle m_1, M_1 ; m_2, M_2 ; ... ; m_n, M_n les limites inférieures et supérieures de $f(x)$ dans ces intervalles respectifs, le plus petit des nombres $m_1, m_2, \ldots, m_n$ est égal à m, et le plus grand des nombres $M_1, M_2, \ldots, M_n$ est égal à M.

144. Soit y une fonction de x définie dans un intervalle dont la limite inférieure est $a + \varepsilon$, ε étant un nombre positif aussi petit que l'on veut (cela arrivera si y est définie dans un intervalle dont la limite inférieure est a). Supposons qu'il existe un nombre b satisfaisant à la condition que voici : quel que soit le nombre positif β, il existe un nombre positif α tel que, pour x compris entre a et $a + \alpha$, la valeur de y soit comprise entre $b - \beta$ et $b + \beta$. Autrement dit, on doi[t] avoir

$$b - \beta < y < b + \beta,$$

si l'on a

$$a < x < a + \alpha ;$$

ou, plus simplement, la double inégalité

$$0 < x - a < \alpha$$

entraine l'inégalité

$$|y - b| < \beta.$$

On exprime ce fait en disant que, *x tendant vers a par valeurs supérieures à a, y tend vers une limite.* Le nombre b s'appelle *la limite de y pour x tendant vers a par valeurs supérieures à a.*

Soit de même y une fonction de x définie dans un intervalle dont la limite supérieure est $a - \varepsilon$, ε étant un nombre positif aussi petit que l'on veut (cette circonstance se présentera si y est définie dans un intervalle dont la limite supérieure est a). Supposons qu'il existe un nombre b satisfaisant à la condition suivante : quel que soit le nombre positif β, il existe un nombre positif α tel que, pour x compris entre $a - \alpha$ et a, la valeur de y soit comprise entre $b - \beta$ et $b + \beta$. Autrement dit, la double inégalité

$$a - \alpha < x < a, \qquad \text{ou} \qquad 0 < a - x < \alpha$$

entraine la double inégalité

$$b - \beta < y < b + \beta,$$

ou l'inégalité

$$|y - b| < \beta.$$

On dit alors que, *x tendant vers a par valeurs inférieures à a, y tend vers une limite.* Le nombre b s'appelle *la limite de y pour x tendant vers a par valeurs inférieures à a.*

Soit enfin y une fonction de x définie : 1° dans un intervalle de limite supérieure $a - \varepsilon$; 2° dans un intervalle de limite inférieure $a + \varepsilon$. Supposons : 1° que y tende vers une limite b quand x tend vers a par valeurs inférieures à a ; 2° que y tende vers une limite b' quand x tend vers a par valeurs supérieures à a; 3° que b soit égal à b'. On dit alors que *y tend vers une limite quand x tend vers a.* Quant au nombre b ou b', on l'appelle *la limite de y pour x tendant vers a*, et l'on écrit $\lim\limits_{x=a} y = b$.

Il revient évidemment au même de dire que y tend vers b quand x tend vers a (par valeurs supérieures à a, ou par valeurs inférieures à a, ou par valeurs quelconques), ou de dire que $y-b$ tend vers zéro quand x tend vers a.

145. Soit de nouveau y une fonction de x définie dans un intervalle de limite inférieure $a+\varepsilon$. Supposons que, quel que soit le nombre positif A, il existe un nombre positif α tel que, pour x compris entre a et $a+\alpha$, la valeur de y soit supérieure à A ou inférieure à $-A$. Autrement dit, la double inégalité

$$0 < x-a < \alpha$$

entraine l'inégalité

$$|y| > A.$$

On dit alors que, *x tendant vers a par valeurs supérieures à a, y augmente indéfiniment*. Dans ces conditions, il peut se faire que, pour toutes les valeurs de x comprises entre a et un nombre b supérieur à a, y ait un signe invariable. Si c'est le signe $+$, on dit que *y augmente indéfiniment par valeurs positives*; si c'est le signe $-$, on dit que *y augmente indéfiniment par valeurs négatives*.

Soit maintenant y une fonction de x définie dans un intervalle de limite supérieure $a-\varepsilon$. Supposons que, quel que soit le nombre positif A, il existe un nombre positif α tel que, pour x compris entre $a-\alpha$ et a, la valeur de y soit supérieure à A ou inférieure à $-A$; autrement dit, la double inégalité

$$0 < a-x < \alpha$$

entraine l'inégalité

$$|y| > A.$$

On dit alors que, *x tendant vers a par valeurs inférieures à a, y augmente indéfiniment*. Dans ces conditions il peut se faire que *y augmente indéfiniment par valeurs positives*, ou qu'il *augmente indéfiniment par valeurs négatives*.

Soit enfin y une fonction de x définie 1° dans un intervalle de limite supérieure $a-\varepsilon$; 2° dans un intervalle de limite inférieure $a+\varepsilon$. Supposons : 1° que, x tendant vers a par

valeurs inférieures à a, y augmente indéfiniment ; 2° que, x tendant vers a par valeurs supérieures à a, y augmente encore indéfiniment. On dit alors que, *x tendant vers a, y augmente indéfiniment.* Il peut se faire que, dans les deux cas, y augmente indéfiniment par valeurs positives ; on dit alors que, *x tendant vers a, y augmente indéfiniment par valeurs positives.* Pareillement, si, dans les deux cas, y augmente indéfiniment par valeurs négatives, on dit que, *x tendant vers a, y augmente indéfiniment par valeurs négatives.* Il peut arriver aussi que y augmente indéfiniment par valeurs positives quand x tend vers a par valeurs inférieures à a et par valeurs négatives quand x tend vers a par valeurs supérieures à x. Pour exprimer ce fait, on emploie la locution abrégée suivante : *y saute de $+\infty$ à $-\infty$ quand x atteint et dépasse a.* De même, cette locution : *y saute de $-\infty$ à $+\infty$ quand x atteint et dépasse a* signifie que y augmente indéfiniment par valeurs négatives quand x tend vers a par valeurs inférieures à a et par valeurs positives quand x tend vers a par valeurs supérieures à a.

146. Dans la démonstration de toutes les propositions (lemmes, théorèmes, remarques) qui vont suivre, nous supposerons, pour fixer les idées, que x tend vers a par valeurs supérieures à a ; mais on peut refaire absolument les mêmes raisonnements dans le cas où x tend vers a par valeurs inférieures à a. C'est pourquoi, dans l'énoncé de ces propositions, nous ne spécifierons pas de quelle manière x tend vers a.

Observons d'abord que si, x tendant vers a, y tend vers une limite *b différente de zéro*, dès lors, pour des valeurs de x suffisamment voisines de a, y n'est pas nulle, et *le signe de y est celui de b.* En effet, x tendant vers a, la différence $y - b = \beta$ tend vers zéro. Il existe donc un nombre positif α tel que, sous la condition $0 < x - a < \alpha$, on ait $|\beta| < |b|$. Dès lors, la somme $b + \beta$ ou y ne sera pas nulle et aura le signe de b.

Lemme I. — *Soit y une fonction de x tendant vers b quand x tend vers a, et soit c un nombre supérieur à $|b|$. Pour des valeurs de x suffisamment voisines de a, on a $|y| < c$.*

En effet, par hypothèse, il existe un nombre positif α tel que les inégalités

(1) $$0 < x - a < \alpha$$

entraînent l'inégalité

$$| y - b | < c - | b | .$$

Or on a

$$| y | - | b | \leqslant | y - b | .$$

Les inégalités (1) entraînent donc *a fortiori* l'inégalité

$$| y | - | b | < c - | b | , \qquad \text{ou} \qquad | y | < c.$$

Ainsi quand, x tendant vers a, y tend vers une limite, il existe un nombre positif c auquel $| y |$ reste inférieure dans le voisinage de $x = a$. La réciproque n'est pas vraie : si un tel nombre c existe, on est sûr que y n'augmente pas indéfiniment quand x tend vers a, mais on ne sait pas si y tend vers une limite.

Lemme II. — *Supposons que, x tendant vers a, y tende vers une limite b* DIFFÉRENTE DE ZÉRO. *Soit c un nombre positif moindre que $| b |$. Pour des valeurs de x suffisamment voisines de a, on a $| y | > c$.*

En effet, par hypothèse, il existe un nombre positif α tel que les inégalités

(1) $$0 < x - a < \alpha$$

entraînent l'inégalité

$$| y - b | < | b | - c.$$

Or on a

$$| b | - | y | \leqslant | y - b | .$$

Les inégalités (1) entraînent donc *a fortiori* l'inégalité

$$| b | - | y | < | b | - c, \qquad \text{ou} \qquad | y | > c.$$

Ainsi quand, x tendant vers a, y tend vers une limite différente de zéro, il existe un nombre positif c auquel $| y |$ reste supérieure dans le voisinage de $x = a$. La réciproque n'est pas vraie : si un tel nombre c existe, on est sûr que y ne tend pas vers zéro ; mais le nombre c peut exister sans que y tende

vers une limite; il existe notamment si y augmente indéfiniment.

147. Les théorèmes sur les limites se réduisent à quatre principaux.

Théorème I. — *Soit* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *des fonctions de* x *tendant respectivement vers des limites* $b_1, b_2, \ldots, b_n$ *quand* x *tend vers* a. *La somme* $z = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$ *tend vers une limite égale à* $b_1 + b_2 + \cdots + b_n$.

Car, quel que soit le nombre positif β, il existe, par hypothèse, des nombres positifs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tels que l'on ait :

pour $0 < x - a < \alpha_1$, l'inégalité $| y_1 - b_1 | < \frac{\beta}{n}$;

pour $0 < x - a < \alpha_2$, l'inégalité $| y_2 - b_2 | < \frac{\beta}{n}$;

. . . .

pour $0 < x - a < \alpha_n$, l'inégalité $| y_n - b_n | < \frac{\beta}{n}$.

Soit α le plus petit des nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Pour

$$0 < x - a < \alpha,$$

on aura simultanément

$$| y_1 - b_1 | < \frac{\beta}{n}, \quad | y_2 - b_2 | < \frac{\beta}{n}, \ldots, \quad | y_n - b_n | < \frac{\beta}{n},$$

d'où

$$| y_1 - b_1 | + | y_2 - b_2 | + \cdots + | y_n - b_n | < \beta.$$

Or on a

$$| z - (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) | \leqslant | y_1 - b_1 | + | y_2 - b_2 | + \cdots | y_n - b_n |.$$

Les inégalités

$$0 < x - a < \alpha$$

entrainent donc *a fortiori* l'inégalité

$$| z - (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) | < \beta,$$

ce qui démontre le théorème.

Remarque. — Proposons-nous de voir ce qui arrive lorsque certaines des fonctions y augmentent indéfiniment. Examinons d'abord le cas où n est égal à 2 : $z = y_1 + y_2$. Supposons que, x tendant vers a, y_1 augmente indéfiniment, et que y_2 soit *finie* dans le voisinage de $x = a$, c'est-à-dire qu'il existe un nombre positif c auquel $|y_2|$ reste inférieure dans le voisinage de $x = a$ (ce qui arrive sûrement (lemme I) si y_2 tend vers une limite b_2). Alors la fonction z augmente indéfiniment.

Soit A un nombre positif quelconque. Nous allons montrer qu'on peut toujours prendre x assez voisin de a pour qu'on ait

$$|y_1 + y_2| > A. \tag{1}$$

En effet, on a

$$|y_1 + y_2| \geqslant |y_1| - |y_2| ;$$

on satisfera donc à l'inégalité (1) si on satisfait à celle-ci :

$$|y_1| - |y_2| > A,$$

ou

$$|y_1| > A + |y_2| . \tag{2}$$

Par hypothèse, il existe un nombre positif α' tel que les inégalités

$$0 < x - a < \alpha'$$

entraînent l'inégalité

$$|y_2| < c ;$$

en ne considérant que de telles valeurs de x, on satisfera *a fortiori* à l'inégalité (2) si on satisfait à la suivante :

$$|y_1| > A + c. \tag{3}$$

Or il existe un nombre positif α'' tel que les inégalités

$$0 < x - a < \alpha''$$

entraînent l'inégalité (3). Soit α le plus petit des deux nombres α', α''. Les inégalités

$$0 < x - a < \alpha$$

entraînent l'inégalité (1).

Ajoutons que la fonction z a le signe de y_1 pour des valeurs de x suffisamment voisines de a; car l'inégalité

$$|y_1| - |y_2| > A,$$

remplie sous les conditions $0 < x - a < \alpha'$, montre qu'on a $|y_1| > |y_2|$: la somme $y_1 + y_2$ a donc le signe de y_1.

Lorsque, x tendant vers a, y_1 augmente indéfiniment, sans que la condition relative à y_2 soit remplie, en particulier si les fonctions y_1 et y_2 augmentent indéfiniment l'une et l'autre, on ne peut rien dire de général sur la fonction z, sauf cependant lorsque y_1 et y_2 augmentent indéfiniment toutes deux par valeurs positives, ou toutes deux par valeurs négatives. Plaçons-nous par exemple dans la première hypothèse. Alors, quel que soit le nombre positif A, il existe un nombre positif α tel que les inégalités

$$0 < x - a < \alpha$$

entraînent les inégalités

$$y_1 > \frac{A}{2}, \qquad y_2 > \frac{A}{2}, \qquad \text{et par suite} \qquad z > A.$$

La fonction z augmente donc indéfiniment par valeurs positives. On voit de même que, si y_1 et y_2 augmentent indéfiniment toutes deux par valeurs négatives, la fonction z, elle aussi, augmente indéfiniment par valeurs négatives.

Dans le cas général où l'on a $z = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$, le lecteur verra sans peine que, si une seule des fonctions y, — la fonction y_1 par exemple — augmente indéfiniment, les fonctions restantes $y_2, \ldots, y_n$ demeurant finies dans le voisinage de $x = a$, la fonction z augmente indéfiniment et a, pour des valeurs de x suffisamment voisines de a, le signe de y_1. Si plusieurs des fonctions y augmentent indéfiniment (les fonctions restantes demeurant finies), on ne peut rien dire de général, sauf si ces fonctions augmentent indéfiniment toutes par valeurs positives, ou toutes par valeurs négatives ; alors la fonction z augmente, elle aussi, indéfiniment, par valeurs positives dans le premier cas, par valeurs négatives dans le second cas.

148. Théorème II. — *Soit $y_1, y_2, \ldots, y_n$ des fonctions de x qui, lorsque x tend vers a, tendent respectivement vers des limites $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Le produit $z = y_1 y_2 \ldots y_n$ tend vers une limite égale à $b_1 b_2 \ldots b_n$.*

Considérons d'abord le cas où n est égal à 2 : $z = y_1 y_2$. Posons

$$y_1 = b_1 + \beta_1, \qquad y_2 = b_2 + \beta_2,$$

d'où
$$z - b_1 b_2 = b_1\beta_2 + b_2\beta_1 + \beta_1\beta_2.$$

Tout revient à démontrer que chacun des trois produits $b_1\beta_2$, $b_2\beta_1$, $\beta_1\beta_2$ tend vers zéro. Considérons le premier produit, $b_1\beta_2$. Si b_1 est nul, ce produit est nul quel que soit x ; si b_1 n'est pas nul, quel que soit le nombre positif ε, il existe un nombre positif α tel que, pour

$$0 < x - a < \alpha,$$

on ait

$$|\beta_2| < \frac{\varepsilon}{|b_1|}, \qquad \text{ou} \qquad |b_1\beta_2| < \varepsilon ;$$

c'est dire que $b_1\beta_2$ tend vers zéro quand x tend vers a. On raisonnerait de même sur le second produit. Passons au troisième, $\beta_1\beta_2$. Quel que soit le nombre positif ε, il existe un nombre positif α tel que, pour

$$0 < x - a < \alpha,$$

on ait

$$|\beta_1| < \sqrt{\varepsilon}, \quad |\beta_2| < \sqrt{\varepsilon},$$

et par suite
$$|\beta_1\beta_2| < \varepsilon.$$

Ce troisième produit tend donc également vers zéro.

Un produit de trois facteurs, $y_1 y_2 y_3$, peut être considéré comme le produit des deux facteurs $y_1 y_2$ et y_3. $y_1 y_2$ tend vers $b_1 b_2$, d'après ce qui précède ; y_3 tend vers b_3 : donc $y_1 y_2 y_3$ tend vers $b_1 b_2 b_3$. Le théorème est donc établi pour un produit de trois facteurs ; on le démontrerait de même, de proche en proche, pour un produit de 4, 5, ..., n facteurs.

Corollaire. — Soit y une fonction de x qui, lorsque x tend vers a, tend vers une limite b. La fonction $z = y^m$, m étant entier et positif, tend vers une limite égale à b^m.

Remarques. — Si toutes les fonctions y tendent vers des limites, il faut et il suffit, pour que z tende vers zéro, que l'une de ces limites soit nulle. Mais z peut tendre vers zéro sans que toutes les fonctions y tendent vers des limites. Supposons que y_1 tende vers zéro, et, de plus, qu'il existe des nombres positifs $c_2, \ldots, c_n$ auxquels les valeurs absolues des fonctions restantes soient respectivement inférieures dans le voisinage de $x = a$; alors z tend vers 0.

Soit ε un nombre positif quelconque. Nous allons montrer qu'on peut toujours prendre x assez voisin de a pour qu'on ait

$$(1) \qquad |y_1 y_2 \ldots y_n| < \varepsilon.$$

En effet, il existe un nombre positif α' tel que, pour

$$0 < x - a < \alpha',$$

on ait

$$|y_2 \ldots y_n| < c_2 \ldots c_n,$$

et par suite

$$|y_1 y_2 \ldots y_n| < |y_1| c_2 \ldots c_n.$$

En ne considérant que de telles valeurs de x, on satisfera *a fortiori* à l'inégalité (1) si on satisfait à celle-ci :

$$|y_1| c_2 \ldots c_n < \varepsilon,$$

ou

$$(2) \qquad |y_1| < \frac{\varepsilon}{c_2 \ldots c_n}.$$

Or il existe un nombre positif α'' tel que, pour

$$0 < x - a < \alpha'',$$

l'inégalité (2) ait lieu. Soit α le plus petit des deux nombres α', α''; la double inégalité

$$0 < x - a < \alpha$$

entraîne l'inégalité (1).

Proposons-nous maintenant de voir ce qui arrive lorsque certaines des fonctions y augmentent indéfiniment. Considérons d'abord un produit de deux facteurs: $z = y_1 y_2$. Supposons que, x tendant vers a, y_1 augmente indéfiniment, et qu'il existe un nombre positif c auquel $|y_2|$ reste supérieure dans le

voisinage de $x = a$ (condition qui sera sûrement remplie (lemme II) si y_2 tend vers une limite b_2 différente de zéro). Alors z augmente indéfiniment.

Soit A un nombre positif quelconque. Nous allons montrer qu'on peut toujours prendre x assez voisin de a pour qu'on ait

$$(1) \qquad | y_1 y_2 | > A.$$

Par hypothèse, il existe un nombre positif α' tel que, pour

$$0 < x - a < \alpha',$$

on ait

$$| y_2 | > c,$$

et par suite

$$| y_1 y_2 | > | y_1 | c.$$

En ne considérant que de telles valeurs de x, on satisfera *a fortiori* à l'inégalité (1) si on satisfait à celle-ci :

$$| y_1 | c > A$$

ou

$$(2) \qquad | y_1 | > \frac{A}{c}.$$

Or il existe un nombre positif α'' tel que, pour

$$0 < x - a < \alpha'',$$

l'inégalité (2) ait lieu. Soit α le plus petit des nombres α', α''; la double inégalité

$$0 < x - a < \alpha$$

entraîne l'inégalité (1).

La condition relative à y_2 est remplie en particulier si y_2 augmente indéfiniment. Ainsi, lorsque les fonctions y_1 et y_2 augmentent indéfiniment l'une et l'autre, il en est de même de la fonction z. Mais, si la condition relative à y_2 n'est pas remplie, en particulier si y_2 tend vers zéro, on ne peut plus rien dire de général sur le produit $y_1 y_2$. Ainsi on ne peut pas dire *a priori* ce que devient un produit dont un facteur augmente indéfiniment, tandis que l'autre tend vers zéro.

Arrivons maintenant au cas général : $z = y_1 y_2 \ldots y_n$. Le lecteur verra sans peine que si, x tendant vers a, certaines

des fonctions y, par exemple $y_1, y_2, \ldots, y_k$ augmentent indéfiniment, si de plus il existe des nombres positifs $c_{k+1}, \ldots, c_n$ auxquels les valeurs absolues de $y_{k+1}, \ldots, y_n$ restent respectivement supérieures dans le voisinage de $x = a$, alors la fonction z, elle aussi, augmente indéfiniment. Si la condition relative aux fonctions $y_{k+1}, \ldots, y_n$ n'est pas remplie, en particulier si certaines de ces fonctions tendent vers 0, on ne peut plus rien dire de général sur la fonction z.

149. Théorème III. — *Soit y_1 et y_2 deux fonctions de x qui, lorsque x tend vers a, tendent respectivement vers des limites b_1 et b_2. Supposons $b_2 \neq 0$. Alors la fonction $z = \frac{y_1}{y_2}$ tend vers une limite égale à $\frac{b_1}{b_2}$.*

Soit ε un nombre positif quelconque. Nous allons montrer qu'on peut toujours prendre x assez voisin de a pour qu'on ait

$$(1) \qquad \left| z - \frac{b_1}{b_2} \right| < \varepsilon.$$

Pour cela posons, comme précédemment,

$$y_1 = b_1 + \beta_1, \qquad y_2 = b_2 + \beta_2 ;$$

nous aurons

$$z - \frac{b_1}{b_2} = \frac{b_2\beta_1 - b_1\beta_2}{b_2 y_2},$$

et l'inégalité (1) peut s'écrire

$$\left| \frac{b_2\beta_1 - b_1\beta_2}{b_2 y_2} \right| < \varepsilon, \quad \text{ou} \quad | b_2\beta_1 - b_1\beta_2 | < \varepsilon \, | b_2 y_2 | .$$

Soit c un nombre positif moindre que $| b_2 |$. Il existe (lemme II) un nombre positif α' tel que, sous les conditions

$$0 < x - a < \alpha',$$

on ait

$$| y_2 | > c, \quad \text{et par suite} \quad | b_2 y_2 | > c^2.$$

En ne considérant que de telles valeurs de x, on satisfera *a fortiori* à l'inégalité (1) si on satisfait à celle-ci :

$$(2) \qquad | b_2\beta_1 - b_1\beta_2 | < \varepsilon c^2.$$

Comme l'expression $b_2\varepsilon_1 - b_1\varepsilon_2$ tend vers 0, il existe un nombre positif α'' tel que, pour

$$0 < x - a < \alpha'',$$

l'inégalité (2) ait lieu. Soit α le plus petit des deux nombres α', α'' ; les inégalités

$$0 < x - a < \alpha$$

entrainent l'inégalité (1), ce qui démontre le théorème.

Remarques. — Si, x tendant vers a, y_2 tend vers zéro, et s'il existe un nombre positif c auquel $| y_1 |$ reste supérieure dans le voisinage de $x = a$ (ce qui arrive sûrement (lemme II) si y_1 tend vers une limite $b_1 \neq 0$, ou encore si y_1 augmente indéfiniment), la fonction z augmente indéfiniment.

Soit A un nombre positif quelconque. Nous allons montrer qu'on peut toujours prendre x assez voisin de a pour qu'on ait

$$(1) \qquad \left| \frac{y_1}{y_2} \right| > \mathrm{A}.$$

En effet; par hypothèse, il existe un nombre positif α' tel que, pour

$$0 < x - a < \alpha',$$

on ait

$$| y_1 | > c,$$

et par suite

$$\left| \frac{y_1}{y_2} \right| > \frac{c}{| y_2 |}.$$

En ne considérant que de telles valeurs de x, on satisfera *a fortiori* à l'inégalité (1) si on satisfait à celle-ci :

$$\frac{c}{| y_2 |} > \mathrm{A},$$

ou

$$(2) \qquad | y_2 | < \frac{c}{\mathrm{A}}.$$

Or il existe un nombre positif α'' tel que, pour

$$0 < x - a < \alpha'',$$

l'inégalité (2) ait lieu. Soit α le plus petit des deux nombres α', α''; les inégalités

$$0 < x - a < \alpha$$

entraînent l'inégalité (1).

Si la condition relative à y_1 n'est pas remplie, en particulier si y_1 tend vers 0 ainsi que y_2, on ne peut rien dire de général sur z.

Si y_2 augmente indéfiniment, et s'il existe un nombre positif c auquel $|y_1|$ reste inférieure dans le voisinage de $x = a$ (ce qui arrive sûrement (lemme I) si y_1 tend vers une limite), alors z tend vers 0.

Soit ε un nombre positif quelconque. Nous allons montrer qu'on peut toujours prendre x assez voisin de a pour qu'on ait

$$(1) \qquad \left|\frac{y_1}{y_2}\right| < \varepsilon.$$

En effet, il existe un nombre positif α' tel que, pour

$$0 < x - a < \alpha',$$

on ait

$$|y_1| < c, \qquad \text{ou} \qquad \left|\frac{y_1}{y_2}\right| < \frac{c}{|y_2|}.$$

En ne considérant que de telles valeurs de x, on satisfera *a fortiori* à l'inégalité (1) si on satisfait à celle-ci :

$$\frac{c}{|y_2|} < \varepsilon,$$

ou

$$(2) \qquad |y_2| > \frac{c}{\varepsilon}.$$

Or il existe un nombre positif α'' tel que, pour

$$0 < x - a < \alpha'',$$

l'inégalité (2) ait lieu. Soit α le plus petit des deux nombres α', α''; les inégalités

$$0 < x - a < \alpha$$

entraînent l'inégalité (1).

150. Théorème IV. — *Soit y une fonction de x qui, lorsque x tend vers a, tend vers une limite b. La fonction $z = \sqrt[m]{y}$ tend vers $\sqrt[m]{b}$: pour m impair, quel que soit b ; pour m pair, si b est positif, ou si b est nul et que y tende vers 0 par valeurs positives.*

Supposons d'abord $b > 0$ et m quelconque. Soit ε un nombre positif quelconque. Nous allons montrer qu'on peut toujours prendre x assez voisin de a pour qu'on ait

$$(1) \qquad \left| \sqrt[m]{y} - \sqrt[m]{b} \right| < \varepsilon.$$

En effet, y est positive pour des valeurs de x assez voisines de a; d'ailleurs on a

$$\sqrt[m]{y} - \sqrt[m]{b} = \frac{y-b}{\sqrt[m]{y^{m-1}} + \sqrt[m]{y^{m-2}b} + \cdots + \sqrt[m]{yb^{m-2}} + \sqrt[m]{b^{m-1}}};$$

l'inégalité (1) peut donc s'écrire

$$|y-b| < \varepsilon\left(\sqrt[m]{y^{m-1}} + \sqrt[m]{y^{m-2}b} + \cdots + \sqrt[m]{yb^{m-2}} + \sqrt[m]{b^{m-1}}\right).$$

Soit c un nombre positif inférieur à b. D'après le lemme II, il existe un nombre positif α' tel que, pour

$$0 < x - a < \alpha',$$

on ait

$$y > c.$$

En ne considérant que de telles valeurs de x, on satisfera *a fortiori* à l'inégalité (1) si on satisfait à celle-ci :

$$(2) \qquad |y-b| < \varepsilon \times m\sqrt[m]{c^{m-1}}.$$

Or il existe un nombre positif α'' tel que, pour

$$0 < x - a < \alpha'',$$

l'inégalité (2) ait lieu. Soit α le plus petit des deux nombres α', α'' ; les inégalités

$$0 < x - a < \alpha$$

entraînent l'inégalité (1).

Supposons $b < 0$, m impair. Alors on a $\sqrt[m]{y} = -\sqrt[m]{-y}$. Or $\sqrt[m]{-y}$ tend vers $\sqrt[m]{-b}$. Donc $\sqrt[m]{y}$ tend vers $-\sqrt[m]{-b}$ ou $\sqrt[m]{b}$.

Supposons enfin $b = 0$. Si m est pair et que y tende ers 0 par valeurs positives, la fonction z tend également ers 0. Car, quel que soit le nombre positif ε, il existe un ombre positif α tel que, pour

$$0 < x - a < \alpha,$$

n ait

$$0 \leqslant y < \varepsilon^m, \qquad \text{et par suite} \qquad 0 \leqslant \sqrt[m]{y} < \varepsilon.$$

i maintenant m est impair, z tend encore vers 0 : car, quel ue soit le nombre positif ε, il existe un nombre positif α tel ue, pour

$$0 < x - a < \alpha,$$

n ait

$$| y | < \varepsilon^m, \qquad \text{d'où} \qquad | \sqrt[m]{y} | < \varepsilon.$$

Remarque. — Lorsque, x tendant vers a, y augmente indéfiniment, $\sqrt[m]{y}$ augmente aussi indéfiniment : pour m impair, quelle que soit la façon dont y augmente indéfiniment ; pour m pair, si y augmente indéfiniment par des valeurs positives.

151. Applications. — 1° L'équation $ax + b = 0$ $(a \neq 0)$ admet une racine unique

$$x_1 = -\frac{b}{a}.$$

Que devient cette racine, lorsque, b conservant une valeur onstante, a tend vers zéro ?

D'abord si b est nul, la racine x_1 est nulle quel que soit a. pposons b différent de zéro. Alors, a tendant vers zéro, la cine x_1 augmente indéfiniment. Si b est positif, elle est posire pour $a < 0$ et négative pour $a > 0$: elle saute donc $+\infty$ à $-\infty$ quand a atteint et dépasse zéro. C'est le ntraire qui arrive si b est négatif.

2° Supposons que, dans l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, on nne aux coefficients b et c des valeurs constantes, la valeur b étant différente de zéro, et qu'on fasse tendre a vers zéro. lors la quantité $4ac - b^2$ tend vers la limite négative $-b^2$.

et, par suite, est négative pour des valeurs de a suffisamment voisines de zéro. L'équation a dès lors deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Que deviennent ces racines, a tendant vers zéro ?

Le radical $\sqrt{b^2-4ac}$ tend vers la limite $\sqrt{b^2}$, qui est égale à $+b$ ou à $-b$, suivant que b est positif ou négatif. Supposons b positif. Alors le numérateur de x_1 tend vers la limite négative $-2b$, et par suite x_1 augmente indéfiniment. D'ailleurs x_1 est positive pour $a<0$, négative pour $a>0$: elle saute donc de $+\infty$ à $-\infty$ quand a atteint et dépasse zéro. Passons à la racine x_2. Ses deux termes tendent vers zéro en même temps que a ; mais, si nous les multiplions tous deux par la quantité négative $-b-\sqrt{b^2-4ac}$, nous obtenons

$$x_2 = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{2a(-b-\sqrt{b^2-4ac})} = \frac{2c}{-b-\sqrt{b^2-4ac}},$$

et l'on voit ainsi que x_2 tend vers la limite $-\frac{c}{b}$.

On voit de même que, si b est négatif, c'est la racine x_1 qui tend vers $-\frac{c}{b}$. Quant à la racine x_2, elle augmente indéfiniment, et comme elle est négative pour $a<0$, positive pour $a>0$, elle saute de $-\infty$ à $+\infty$ quand a atteint et dépasse zéro.

3° Le *signe* d'une fonction entière, pour des valeurs de x suffisamment petites en valeur absolue, est celui du *terme de plus bas degré*.

Considérons d'abord une fonction entière avec un terme constant :

$$a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m \qquad (a_m \neq 0).$$

Lorsque x tend vers 0, chaque terme, sauf le dernier, tend vers 0, et la fonction tend vers a_m. Si donc x est suffisamment petit en valeur absolue, la fonction n'est pas nulle et a le signe de a_m.

Supposons à présent que la fonction ne contienne pas de terme constant :

$$a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_{m-r}x^r \qquad (r > 0,\ a_{m-r} \neq 0).$$

On peut l'écrire

$$x^r(a_0x^{m-r} + a_1x^{m-r-1} + \cdots + a_{m-r}),$$

et, sous cette forme, on voit que, pour x suffisamment petit en valeur absolue, le second facteur est $\neq 0$ et a le signe de a_{m-r} : la fonction a donc le signe de $a_{m-r}x^r$, c'est-à-dire de son terme de plus bas degré. Si r est pair, ce signe est toujours le même pour les petites valeurs de x, positives ou négatives; tandis que, si r est impair, le signe de la fonction change avec celui de x.

Extension des propriétés précédentes au cas où la variable indépendante augmente indéfiniment.

152. De nouvelles définitions sont nécessaires.

Soit y une fonction de x définie dans l'intervalle $(a, +\infty)$. Supposons qu'il existe un nombre b satisfaisant à la condition suivante : quel que soit le nombre positif β, il existe un nombre positif A tel que, pour toutes les valeurs de x supérieures à A, on ait $|y - b| < \beta$. On dit alors que, x *augmentant indéfiniment par valeurs positives, y tend vers une limite*. Le nombre b s'appelle *la limite de y quand x augmente indéfiniment par valeurs positives*, et l'on écrit $\lim\limits_{x=+\infty} y = b$.

Soit de même y une fonction de x définie dans l'intervalle $(-\infty, a)$, et supposons qu'il existe un nombre b jouissant de la propriété suivante : quel que soit le nombre positif β, il existe un nombre positif A tel que, pour toutes les valeurs de x inférieures à $-$A, on ait $|y - b| < \beta$. On dit alors que, x *augmentant indéfiniment par valeurs négatives, y tend vers une limite*. Le nombre b s'appelle *la limite de y quand x augmente indéfiniment par valeurs négatives*, et l'on écrit $\lim\limits_{x=-\infty} y = b$.

Soit enfin y une fonction définie 1° dans l'intervalle $(-\infty, a')$;

2° dans l'intervalle $(a, +\infty)$. Supposons : 1° que y tende vers une limite b quand x augmente indéfiniment par valeurs négatives; 2° que y tende vers une limite b' quand x augmente indéfiniment par valeurs positives; 3° que b soit égal à b'. On dit alors que, *x augmentant indéfiniment, y tend vers une limite*. Le nombre b ou b' s'appelle *la limite de y quand x augmente indéfiniment*, et l'on écrit $\lim_{x=\infty} y = b$.

Soit de nouveau y une fonction de x définie dans l'intervalle $(a, +\infty)$. Si, quel que soit le nombre positif B, il existe un nombre positif A tel que, pour $x > A$, on ait $|y| > B$, on dit que, *x augmentant indéfiniment par valeurs positives, y augmente indéfiniment*. Dans ces conditions, il peut arriver que la fonction y conserve un signe invariable pour toutes les valeurs de x supérieures à un certain nombre b; si ce signe est le signe $+$, on dit que y *augmente indéfiniment par valeurs positives;* si c'est le signe $-$, que y *augmente indéfiniment par valeurs négatives*.

Supposons maintenant y définie dans l'intervalle $(-\infty, a)$. Si, quel que soit le nombre positif B, il existe un nombre positif A tel que, pour $x < -A$, on ait $|y| > B$, on dit que, *x augmentant indéfiniment par valeurs négatives, y augmente indéfiniment*. Comme précédemment, il peut se faire que *y augmente indéfiniment par valeurs positives* ou qu'*elle augmente indéfiniment par valeurs négatives*.

Soit enfin y une fonction définie 1° dans l'intervalle $(-\infty, a)$; 2° dans l'intervalle $(b, +\infty)$. Supposons : 1° que, x augmentant indéfiniment par valeurs négatives, y augmente indéfiniment ; 2° que, x augmentant indéfiniment par valeurs positives, y augmente encore indéfiniment. On dit alors que *y augmente indéfiniment en même temps que x*. Il peut se faire que, dans les deux cas, y augmente indéfiniment par valeurs positives ; on dit alors que, *x augmentant indéfiniment, y augmente indéfiniment par valeurs positives*. Pareillement si, dans les deux cas, y augmente indéfiniment par valeurs négatives, on dit que, *x augmentant indéfiniment, y augmente indéfiniment par valeurs négatives*.

Ces définitions posées, rien n'est plus facile que d'étendre au cas où x augmente indéfiniment les propositions démontrées dans le cas où x tend vers a. Bornons-nous au premier théorème :

Soit $y_1, y_2, \ldots, y_n$ des fonctions de x qui, lorsque x augmente indéfiniment, tendent respectivement vers les limites $b_1, b_2, \ldots, b_n$. La fonction $z = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$ tend vers une limite égale à $b_1 + b_2 + \cdots + b_n$.

Nous supposerons, pour fixer les idées, que x augmente indéfiniment par valeurs positives. Quel que soit le nombre positif ε, il existe des nombres positifs $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tels que,

$$\begin{array}{llll} \text{pour} & x > A_1, & \text{on ait} & |y_1 - b_1| < \frac{\varepsilon}{n}, \\ \text{»} & x > A_2, & \text{»} & |y_2 - b_2| < \frac{\varepsilon}{n}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \text{»} & x > A_n, & \text{»} & |y_n - b_n| < \frac{\varepsilon}{n}; \end{array}$$

A étant le plus grand des nombres $A_1, A_2, \ldots, A_n$, pour $x > A$, on aura simultanément

$$|y_1 - b_1| < \frac{\varepsilon}{n}, \quad |y_2 - b_2| < \frac{\varepsilon}{n}, \ldots, |y_n - b_n| < \frac{\varepsilon}{n},$$

et *a fortiori*

$$|z - (b_1 + b_2 + \cdots b_n)| < \varepsilon.$$

C'est dire que z tend vers $b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ lorsque x augmente indéfiniment par valeurs positives.

Cet exemple fait suffisamment comprendre, croyons-nous, comment on peut étendre au cas de x infini toutes les propositions (lemmes, théorèmes, remarques) précédemment démontrées. Nous supposerons donc faite cette extension, et nous allons en indiquer quelques applications importantes.

153. Considérons en premier lieu la fonction entière

$$y = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \cdots + a_{m-1} x + a_m \qquad (a_0 \neq 0),$$

et proposons-nous de voir ce qu'elle devient quand x augmente

indéfiniment. Ses différents termes, sauf le dernier, augmentent indéfiniment, mais ils n'ont pas nécessairement le même signe, et par conséquent cela ne nous apprend rien sur y. Mais nous pouvons écrire

$$y = x^m\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_{m-1}}{x^{m-1}} + \frac{a_m}{x^m}\right).$$

y est maintenant un produit de deux facteurs dont le premier, x^m, augmente indéfiniment avec x. Dans le second, les termes $\frac{a_1}{x}$, $\frac{a_2}{x^2}$, $\ldots$, $\frac{a_m}{x^m}$ tendent tous vers zéro, de sorte que ce facteur tend vers la limite a_0, qui est différente de zéro. Donc *la fonction y augmente aussi indéfiniment*. Ajoutons que, pour des valeurs de x suffisamment grandes en valeur absolue, le polynome n'est pas nul et a le *signe de son terme de plus haut degré*. En effet, le second facteur, tendant vers une limite a_0 différente de zéro, a le signe de a_0 pour des valeurs de x suffisamment grandes en valeur absolue : dès lors y a le signe de a_0x^m.

Supposons, pour fixer les idées, le coefficient a_0 positif. Si m est pair, le terme a_0x^m est toujours positif : donc y augmente indéfiniment par valeurs positives quand x augmente indéfiniment. Si m est impair, le terme a_0x^m a le signe de x : donc, suivant que la variable x augmente indéfiniment par valeurs positives ou par valeurs négatives, la fonction y, elle aussi, augmente indéfiniment par valeurs positives ou par valeurs négatives.

Soit maintenant la fraction rationnelle

$$y = \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0x^p + b_1x^{p-1} + \cdots + b_p} \qquad (a_0b_0 \neq 0).$$

x augmentant indéfiniment, les deux termes de la fraction augmentent indéfiniment, ce qui ne nous apprend rien sur y. Mais on peut décomposer y en deux facteurs de la manière suivante :

$$y = \frac{x^m}{x^p} \times \frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_m}{x^m}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \cdots + \frac{b_p}{x^p}}.$$

x augmentant indéfiniment, le second facteur tend vers la limite différente de zéro $\frac{a_0}{b_0}$. Si m est égal à p, le premier facteur est égal à 1 quel que soit x, et y tend vers $\frac{a_0}{b_0}$. Si m est inférieur à p, $\frac{x^m}{x^p} = \frac{1}{x^{p-m}}$ tend vers zéro, et il en est de même de y. Enfin si m est supérieur à p, $\frac{x^m}{x^p} = x^{m-p}$ augmente indéfiniment avec x, et il en est de même de y. Pour des valeurs de x suffisamment grandes en valeur absolue, y a le signe de $\frac{a_0 x^m}{b_0 x^p}$; ce signe est celui de $\frac{a_0}{b_0}$, si m et p sont de même parité; celui de $\frac{a_0}{b_0}x$, si m et p sont de parités différentes.

Ainsi, $f(x)$ *et* $\varphi(x)$ *étant deux polynomes de degrés* m *et* p, *la fraction rationnelle* $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ *augmente indéfiniment en même temps que* x, *si* m *est plus grand que* p; *si* m *est plus petit que* p, *elle tend vers zéro; enfin, si* m *est égal à* p, *elle tend vers une limite différente de zéro, qui est le quotient des coefficients de* x^m *dans* $f(x)$ *et dans* $\varphi(x)$.

De la Continuité.

154. Soit $f(x)$ une fonction de x définie dans un intervalle (b, c) auquel appartient le nombre a, et soit $f(a)$ la valeur de cette fonction pour $x = a$.

Supposons d'abord $a < c$. Si $f(x)$ tend vers une limite quand x tend vers a par valeurs supérieures à a, et si cette limite est $f(a)$, nous dirons que $f(x)$ *est continue à droite pour* $x = a$. Cela revient à dire que, quel que soit le nombre positif ε, il existe un nombre positif α tel que la double inégalité

$$0 \leqslant x - a < \alpha$$

entraîne l'inégalité

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

De même, supposons $b < a$. Si $f(x)$ tend vers une limite quand x tend vers a par valeurs inférieures à a, et si cette limite est $f(a)$, nous dirons que *$f(x)$ est continue à gauche pour $x = a$*. Cela revient à dire que, quel que soit le nombre positif ε, il existe un nombre positif α tel que la double inégalité

$$0 \leqslant a - x < \alpha$$

entraîne l'inégalité

$$| f(x) - f(a) | < \varepsilon.$$

Enfin supposons $b < a < c$. Si la fonction $f(x)$ est à la fois continue à droite et continue à gauche pour $x = a$, on dit qu'*elle est continue pour* $x = a$. Ainsi, dire que $f(x)$ est continue pour $x = a$, c'est dire : 1° que $f(x)$ tend vers une limite quand x tend vers a ; 2° que cette limite est $f(a)$. Autrement dit, quel que soit le nombre positif ε, il existe un nombre positif α tel que l'inégalité

$$| x - a | < \alpha$$

entraîne l'inégalité

$$| f(x) - f(a) | < \varepsilon.$$

Comme application de ces définitions, considérons une fonction $f(x)$ définie dans les deux intervalles $(b, a - \varepsilon)$, $(a + \varepsilon, c)$, ε étant un nombre positif aussi petit que l'on veut. Supposons qu'elle tende vers une limite l quand x tend vers a par valeurs inférieures à a et vers une limite l' quand x tend vers a par valeurs supérieures à a. On peut faire en sorte que $f(x)$ soit définie dans tout l'intervalle (b, c) : il suffit de choisir arbitrairement un nombre λ que l'on dira être la valeur de $f(x)$ pour $x = a$. Voyons si l'on peut choisir ce nombre de manière à rendre la fonction continue pour $x = a$.

Soit d'abord $l \neq l'$. Si le nombre choisi λ n'est égal ni à l ni à l', la fonction $f(x)$ n'est continue ni à gauche ni à droite pour $x = a$. Si λ est égal à l, $f(x)$ est continue à gauche sans l'être à droite. Enfin si λ est égal à l', $f(x)$ est continue à droite sans l'être à gauche.

Soit maintenant $l = l'$. Alors, si le nombre λ n'est pas égal à l, la fonction n'est continue ni à gauche ni à droite pour $x = a$. Mais si λ est égal à l, alors $f(x)$ est continue, pour

$x = a$, à gauche et à droite; autrement dit, $f(x)$ est continue pour $x = a$.

Une fonction $f(x)$ définie dans un intervalle (a, b) est dite *continue dans l'intervalle* (a, b) lorsqu'elle est : 1° continue pour toute valeur de x comprise entre a et b; 2° continue à droite pour $x = a$; 3° continue à gauche pour $x = b$.

Par analogie, nous dirons qu'une fonction $f(x)$ est *continue dans l'intervalle* $(a, +\infty)$, lorsqu'elle est continue à droite pour $x = a$ et continue pour toutes les valeurs de x supérieures à a; *continue dans l'intervalle* $(-\infty, a)$, lorsqu'elle est continue à gauche pour $x = a$ et continue pour toutes les valeurs de x inférieures à a; *continue dans l'intervalle* $(-\infty, +\infty)$, lorsqu'elle est continue pour toutes les valeurs de x.

155. Les quatre théorèmes suivants sont vrais, que les fonctions considérées soient continues à droite pour $x = a$ ou qu'elles le soient à gauche. C'est pourquoi, dans l'énoncé de ces théorèmes, nous dirons simplement que ces fonctions sont supposées continues pour $x = a$, sans spécifier si c'est à droite ou à gauche.

Théorème I. — *Soit* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *des fonctions de* x *continues pour* $x = a$. *La fonction* $z = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$ *est également continue pour* $x = a$.

En effet, désignons par $b_1, b_2, \ldots, b_n$ et c les valeurs des fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ et z pour $x = a$. On a

$$c = b_1 + b_2 + \cdots + b_n.$$

x tendant vers a (par valeurs supérieures à a ou par valeurs inférieures à a, suivant que les fonctions y sont supposées continues à droite ou continues à gauche), les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ tendent respectivement vers les limites $b_1, b_2, \ldots, b_n$: donc, en vertu du premier théorème sur les limites, la fonction z tend vers une limite égale à c.

Il résulte de là que, si les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sont continues dans un intervalle (a, b), la fonction $z = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$ est continue dans le même intervalle.

On raisonnera absolument de même pour démontrer les deux théorèmes suivants :

Théorème II. — *Soit* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *des fonctions de* x *continues pour* $x = a$. *La fonction* $z = y_1 y_2 \ldots y_n$ *est également continue pour* $x = a$. En particulier, si une fonction y est continue pour $x = a$, il en est de même de la fonction y^n (n entier positif).

De là résulte que, si les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sont continues dans un intervalle (a, b), la fonction $z = y_1 y_2 \ldots y_n$ est continue dans le même intervalle. En particulier, si une fonction y est continue dans un intervalle (a, b), il en est de même de y^n (n entier positif).

Théorème III. — *Soit* y_1 *et* y_2 *deux fonctions de* x *continues pour* $x = a$, y_2 NE S'ANNULANT PAS POUR CETTE VALEUR DE x. *La fonction* $\frac{y_1}{y_2}$ *est également continue pour* $x = a$.

Et si les deux fonctions y_1, y_2 sont continues dans un intervalle (a, b) *ne contenant aucune valeur qui annule* y_2, la fonction $\frac{y_1}{y_2}$ est continue dans ce même intervalle.

Le quatrième théorème concerne la fonction $\sqrt[m]{y}$.

Théorème IV. — *Soit* y *une fonction de* x *continue pour* $x = a$ *et prenant, pour* $x = a$, *la valeur* b. *La fonction* $z = \sqrt[m]{y}$ *est également continue pour* $x = a$: *pour m impair, quel que soit* b ; *pour* m *pair, si* b *est positif.*

En effet, x tendant vers a, y tend vers b ; dès lors, en vertu du quatrième théorème sur les limites, $\sqrt[m]{y}$ tend vers $\sqrt[m]{b}$.

Qu'arrive-t-il si, m étant pair, y s'annule pour $x = a$? Si la fonction y est continue à droite pour $x = a$ et tend vers zéro par valeurs positives quand x tend vers a par valeurs supérieures à a, $\sqrt[m]{y}$ tend vers zéro, et par suite la fonction z est continue à droite pour $x = a$. De même, si la fonction y est continue à gauche pour $x = a$ et tend vers zéro par valeurs positives quand x tend vers a par valeurs inférieures à a, z est continue à gauche pour $x = a$.

De tout cela il résulte que, si une fonction y est continue dans l'intervalle (a, b), la fonction $z = \sqrt[m]{y}$ est continue dans ce même intervalle : pour m impair, quel que soit le signe de y; pour m pair, si y ne devient jamais négative dans l'intervalle (a, b).

156. Applications. — 1° Considérons d'abord la fonction entière

$$y = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_{m-1}x + a_m.$$

Quelle que soit la valeur a, ses différents termes sont continus pour $x = a$, d'après le théorème II : y est donc continue pour $x = a$, d'après le théorème I. *Une fonction entière est donc continue dans l'intervalle* $(-\infty, +\infty)$.

2° Soit maintenant la fonction

$$y = \sqrt[m]{f(x)} \qquad (m \text{ entier positif}),$$

$f(x)$ étant un polynome. Si m est impair, cette fonction est continue pour toute valeur de x. Supposons m pair. Si $f(a)$ est > 0, la fonction y est continue pour $x = a$, d'après le théorème IV. Qu'arrive-t-il si $f(a)$ est nul ? Le polynome $f(x)$ est alors divisible par $x - a$; il peut d'ailleurs être divisible par une puissance de $x - a$ dont l'exposant est supérieur à 1 : supposons qu'il soit divisible par $(x-a)^\alpha$ sans l'être par $(x-a)^{\alpha+1}$. On pourra écrire $f(x) \equiv (x-a)^\alpha \varphi(x)$, $\varphi(x)$ étant un polynome qui ne s'annule pas pour $x = a$. x tendant vers a, $\varphi(x)$ tend vers $\varphi(a)$: $\varphi(x)$ a donc, pour des valeurs de x suffisamment voisines de a, le signe de $\varphi(a)$. Supposons d'abord $\varphi(a) > 0$; alors, si α est pair, $f(x)$ tend vers zéro par valeurs positives quand x tend vers a, et y est continue pour $x = a$; si α est impair, $f(x)$ tend vers zéro par valeurs positives quand x tend vers a par valeurs supérieures à a, et y est continue à droite pour $x = a$. Soit maintenant $\varphi(a) < 0$; si α est pair, y n'est définie dans aucun intervalle contenant la valeur a ; si α est impair, $f(x)$ tend vers zéro par valeurs positives quand x tend vers a par valeurs inférieures à a, et y est continue à gauche pour $x = a$.

3° Soit enfin la fraction rationnelle $y = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$. Elle est continue pour $x = a$ (théorème III), si $\varphi(a)$ n'est pas nul. Ainsi *une fraction rationnelle est continue dans tout intervalle ne contenant pas de racine du dénominateur*.

Supposons $\varphi(a) = 0$, et cherchons ce que devient $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ quand x tend vers a. $f(x)$ tend alors vers $f(a)$ et $\varphi(x)$ vers zéro; si donc $f(a)$ n'est pas nul, y augmente indéfiniment. Il reste à voir ce qui arrive lorsque $f(a)$ est nul. Soit alors $(x-a)^\alpha$ et $(x-a)^\beta$ les plus hautes puissances de $x-a$ divisant respectivement $f(x)$ et $\varphi(x)$, de sorte qu'on a

$$f(x) \equiv (x-a)^\alpha f_1(x), \qquad \varphi(x) \equiv (x-a)^\beta \varphi_1(x),$$

$f_1(x)$ et $\varphi_1(x)$ étant deux polynomes qui ne s'annulent pas pour $x = a$. Ecrivons y ainsi :

$$y = \frac{(x-a)^\alpha}{(x-a)^\beta} \times \frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}.$$

x tendant vers a, le second facteur tend vers la limite différente de zéro $\frac{f_1(a)}{\varphi_1(a)}$, et il a le signe de cette limite pour des valeurs de x suffisamment voisines de a. Cela étant, distinguons trois cas.

1[er] cas : $\alpha = \beta$. Le premier facteur est égal à 1 quel que soit x, et y tend vers une limite, $\frac{f_1(a)}{\varphi_1(a)}$, qui est différente de zéro.

2[e] cas : $\alpha > \beta$. Le premier facteur, qui peut se mettre sous la forme $(x-a)^{\alpha-\beta}$, tend vers zéro : y tend donc également vers zéro.

3[e] cas : $\alpha < \beta$. Le premier facteur, qui peut alors s'écrire $\frac{1}{(x-a)^{\beta-\alpha}}$, augmente indéfiniment : y augmente donc aussi indéfiniment. Ajoutons que, si $\beta-\alpha$ est pair, y augmente indéfiniment par valeurs positives ou par valeurs négatives, suivant que $\frac{f_1(a)}{\varphi_1(a)}$ est positif ou négatif; si $\beta-\alpha$

est impair, alors, x atteignant et dépassant a, y saute de $-\infty$ à $+\infty$, si $\frac{f_1(a)}{\varphi_1(a)}$ est > 0 ; de $+\infty$ à $-\infty$, si $\frac{f_1(a)}{\varphi_1(a)}$ est < 0.

157. Théorème de Cauchy. — *$f(x)$ étant une fonction continue dans l'intervalle (a, b), si les deux nombres $f(a)$, $f(b)$ sont de signes contraires, il existe entre a et b un nombre c tel que $f(c)$ soit égal à 0.*

Supposons $f(a)$ négatif et $f(b)$ positif. Nous allons montrer qu'il existe deux nombres a_1, b_1 $(a_1 \geqslant a,\ b_1 \leqslant b,\ a_1 < b_1)$ tels qu'on ait

$$f(a_1) \leqslant 0, \qquad f(b_1) \geqslant 0, \qquad b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}.$$

Considérons en effet le nombre $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$: s'il est positif, nous prendrons $a_1 = a$, $b_1 = \frac{a+b}{2}$; s'il est négatif, nous prendrons $a_1 = \frac{a+b}{2}$, $b_1 = b$; s'il est nul, nous prendrons indifféremment l'un ou l'autre système de valeurs pour a_1 et b_1. Si l'un des deux nombres $f(a_1)$, $f(b_1)$ est nul, le théorème est démontré ; s'il n'en est pas ainsi, il existe deux nombres a_2, b_2 $(a_2 \geqslant a_1,\ b_2 \leqslant b_1,\ a_2 < b_2)$ tels qu'on ait

$$f(a_2) \leqslant 0, \quad f(b_2) \geqslant 0, \quad b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b-a}{4}.$$

Et ainsi de suite. Si l'un des nombres a_n ou b_n que l'on rencontre en continuant ainsi annule $f(x)$, le théorème est démontré ; s'il n'en est pas ainsi, considérons les deux séries

(1) $a,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots,$

(2) $b,\ b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n,\ \ldots.$

Les termes de la série (1) ne vont jamais en diminuant ; ceux de la série (2) ne vont jamais en augmentant ; enfin on a, quel que soit n :

$$f(a_n) < 0, \qquad f(b_n) > 0, \qquad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}.$$

De ce que les termes de la série (1) ne vont jamais en diminuant et restent inférieurs à b $(a_n < b_n \leqslant b)$ il résulte que a_n tend vers une limite c quand n augmente indéfiniment, et que l'on a $c \leqslant b$. De même, de ce que les termes de la série (2) ne vont jamais en augmentant et restent supérieurs à a il résulte que b_n tend vers une limite d supérieure ou égale à a. Enfin, l'égalité $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ montre que $b_n - a_n$ tend vers zéro quand n augmente indéfiniment, et que par suite les deux nombres c et d sont égaux.

Le nombre c vérifie nécessairement l'une des deux inégalités $c > a$, $c < b$. Supposons qu'il vérifie la première, et considérons la série

$$f(a),\ f(a_1),\ f(a_2),\ \ldots,\ f(a_n),\ \ldots,$$

dont tous les termes sont négatifs. Nous allons montrer que, n augmentant indéfiniment, $f(a_n)$ tend vers $f(c)$. Car soit ε un nombre positif quelconque. La fonction $f(x)$ étant, par hypothèse, continue à gauche pour $x = c$, il existe un nombre positif α tel que l'inégalité

$$0 \leqslant c - x < \alpha$$

entraîne l'inégalité

$$|\, f(x) - f(c)\, | < \varepsilon.$$

D'ailleurs, puisque a_n tend vers c par valeurs non supérieures à c, il existe un entier positif r tel que, pour $n > r$, on ait

$$0 \leqslant c - a_n < \alpha,$$

et par suite

$$|\, f(a_n) - f(c)\, | < \varepsilon.$$

C'est dire que $f(a_n)$ tend vers $f(c)$ quand n augmente indéfiniment.

Le nombre $f(a_n)$ étant négatif quel que soit n, sa limite $f(c)$ n'est certainement pas positive (si le nombre $f(c)$ était positif le nombre $f(a_n)$ serait également positif à partir d'une certaine valeur de n). Le nombre c est donc inférieur (et non égal) à b Ainsi l'on a

$$a < c < b.$$

Maintenant, la fonction $f(x)$ étant continue à droite pour $x = c$, on démontre par un raisonnement analogue au précédent que le terme général de la série

$$f(b),\ f(b_1),\ f(b_2),\ \ldots,\ f(b_n), \ldots ,$$

à termes tous positifs, a également pour limite $f(c)$. Le nombre $f(c)$ n'est donc pas négatif. On a donc nécessairement

$$f(c) = 0 \text{ (1)}.$$

158. Corollaire. — *$f(x)$ étant une fonction continue dans l'intervalle (a, b), et C étant un nombre quelconque compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe entre a et b un nombre c tel que $f(c)$ soit égal à C.*

En effet, la fonction $\varphi(x) = f(x) - C$ est, elle aussi, continue dans l'intervalle (a, b), et les deux nombres $\varphi(a) = f(a) - C$ et $\varphi(b) = f(b) - C$ sont de signes contraires.

On énonce cette propriété d'une manière abrégée en disant qu'*une fonction continue ne peut pas passer d'une valeur à une autre sans passer par toutes les valeurs intermédiaires.*

159. Applications : 1° *Tout polynome en x de degré impair s'annule au moins pour une valeur de x.*

Soit $f(x) \equiv a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m$ $(a_0 \neq 0)$ un polynome de degré impair. Nous avons vu qu'il existe un nombre positif l tel que, pour $|x| > l$, $f(x)$ ait le même signe que a_0x^m. k étant un nombre quelconque supérieur à l, $f(-k)$ a le signe de $-a_0$ et $f(+k)$ le signe de $+a_0$. Il existe donc dans l'intervalle $(-k, +k)$ une valeur de x qui annule $f(x)$.

2° *Tout polynome en x de degré pair, m, dans lequel le coefficient de x^m et le terme constant sont de signes contraires, s'annule au moins pour une valeur positive et au moins pour une valeur négative de x.*

Soit $f(x) \equiv a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m$ le polynome en ques-

(1) Par suite on a, quel que soit n, les *inégalités* $a_n < c < b_n$: car aucun des nombres $f(a_n)$, $f(b_n)$ n'est *égal* à zéro.

tion dans lequel nous supposons $a_0 a_m < 0$. Le nombre positif k étant déterminé comme précédemment, $f(-k)$ et $f(+k)$ ont le signe de a_0, tandis que $f(0) = a_m$ a le signe de $-a_0$. Chacun des intervalles $(-k, 0)$, $(0, +k)$ comprend par conséquent au moins une valeur de x annulant $f(x)$.

3° Considérons l'équation

$$(1) \qquad \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \cdots + \frac{L}{x-l} + \lambda = 0,$$

dans laquelle nous supposons A, B, ..., L positifs, et en outre

$$a < b < c < \cdots < l.$$

On peut l'écrire ainsi :

$$\frac{A(x-b)\ldots(x-l) + \ldots + L(x-a)\ldots(x-k) + \lambda(x-a)(x-b)\ldots(x-k)(x-l)}{(x-a)(x-b)\ldots(x-k)(x-l)} = 0.$$

Les valeurs de x annulant le dénominateur sont $a, b, \ldots, k, l$; aucune d'elles n'annulant le numérateur, l'équation (1) équivaut à la suivante :

$$(2) \quad A(x-b)\cdots(x-l) + \cdots + L(x-a)\cdots(x-k) + \lambda(x-a)(x-b)\cdots(x-l) = 0.$$

Or le premier membre de l'équation (2) est un polynome de degré m (m étant le nombre des quantités $a, b, \ldots, k, l$) si λ est différent de zéro, de degré $m-1$ si λ est nul. L'équation (1) ne peut donc pas admettre dans le premier cas plus de m racines, dans le second cas plus de $m-1$ racines. Nous allons montrer que le nombre de ses racines a précisément cette valeur qu'il ne peut dépasser.

A cet effet, considérons la fonction

$$f(x) \equiv \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \cdots + \frac{L}{x-l} + \lambda.$$

Elle est continue dans chacun des $m+1$ intervalles

$(-\infty, a-\varepsilon)$, $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$, . ., $(k+\varepsilon, l-\varepsilon)$, $(l+\varepsilon, +\infty$

Faisons abstraction des deux intervalles extrêmes. Nous allo[ns] montrer que chacun des $m-1$ intervalles restants renferm[e] une valeur de x annulant y. Considérons par exemple l'inte[rvalle]

valle $(a+\varepsilon,\ b-\varepsilon)$. x tendant vers a par valeurs supérieures à a, le terme $\dfrac{A}{x-a}$ augmente indéfiniment par valeurs positives; les termes $\dfrac{B}{x-b}, \ldots, \dfrac{L}{x-l}$ tendent vers des limites respectivement égales à $\dfrac{B}{a-b}, \ldots, \dfrac{L}{a-l}$: donc $f(x)$ augmente indéfiniment par valeurs positives. On voit d'une manière analogue que, x tendant vers b par valeurs inférieures à b, $f(x)$ augmente indéfiniment par valeurs négatives. Il existe donc un nombre positif ε assez petit pour qu'on ait

$$f(a+\varepsilon) > 0, \qquad f(b-\varepsilon) < 0.$$

L'intervalle $(a+\varepsilon,\ b-\varepsilon)$ contient donc une valeur de x annulant $f(x)$. On raisonne d'une manière analogue sur les intervalles $(b+\varepsilon,\ c-\varepsilon), \ldots, (k+\varepsilon,\ l-\varepsilon)$. Donc, si λ est nul, l'équation (1) a $m-1$ racines.

Si λ n'est pas nul, elle a, outre ces $m-1$ racines, une $m^{\text{ième}}$ racine appartenant à l'un des intervalles extrêmes. En effet, on voit immédiatement que, quand x augmente indéfiniment, $f(x)$ tend vers λ : car les termes $\dfrac{A}{x-a}, \dfrac{B}{x-b}, \ldots, \dfrac{L}{x-l}$ tendent tous vers zéro. Il existe donc un nombre positif M assez grand pour que les deux nombres $f(-M)$ et $f(+M)$ aient le signe de λ. Il existe d'autre part un nombre positif ε assez petit pour que $f(a-\varepsilon)$ soit négatif et $f(l+\varepsilon)$ positif. Si λ est positif, les inégalités

$$f(-M) > 0, \qquad f(a-\varepsilon) < 0$$

montrent qu'il y a une racine dans l'intervalle $(-M,\ a-\varepsilon)$; si λ est négatif, les inégalités

$$f(l+\varepsilon) > 0, \qquad f(+M) < 0$$

montrent qu'il y a une racine dans l'intervalle $(l+\varepsilon,\ +M)$.

160. Théorème. — *Une fonction $f(x)$ continue dans un intervalle (a, b) est nécessairement finie dans cet intervalle.*

Supposons en effet que la fonction $f(x)$ ne soit pas finie dans l'intervalle (a, b), et montrons qu'il est impossible qu'elle soit

continue dans cet intervalle. Formons les deux intervalles $\left(a, \frac{a+b}{2}\right)$ et $\left(\frac{a+b}{2}, b\right)$; dans l'un d'eux au moins, la fonction $f(x)$ n'est pas finie ; appelons cet intervalle (a_1, b_1) $\left(a_1 \geqslant a, \ b_1 \leqslant b, \ b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}\right)$. Nous formerons de même un intervalle (a_2, b_2) $\left(a_2 \geqslant a_1, \ b_2 \leqslant b_1, \ b_2 - a_2 = \frac{b-a}{4}\right)$ dans lequel la fonction $f(x)$ ne sera pas finie. Et ainsi de suite indéfiniment. On voit, en répétant un raisonnement déjà employé, que, pour n infini, a_n et b_n tendent vers la même limite c. Ce nombre c appartient à l'intervalle (a_n, b_n), quel que soit n. La fonction $f(x)$ est discontinue pour $x = c$; sans quoi il existerait un nombre positif η tel que l'on eût $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ pour toutes les valeurs de x appartenant à l'intervalle (a, b) et différent de c de moins de η. On pourrait prendre n assez grand pour que $b_n - a_n$ fût inférieur à η, et alors, dans l'intervalle (a_n, b_n), la fonction $f(x)$ serait moindre en valeur absolue que $\varepsilon + |f(c)|$; résultat faux, puisque $f(x)$ n'est pas finie dans l'intervalle (a_n, b_n).

161. Théorème. — *Soit $f(x)$ une fonction continue et par suite finie dans un intervalle (a, b). Appelons M sa limite supérieure et m sa limite inférieure dans cet intervalle. Il existe dans l'intervalle (a, b) deux nombres x_0, x_1 tels qu'on ait*

$$f(x_0) = \text{M}, \qquad f(x_1) = m.$$

Etablissons par exemple l'existence du nombre x_0. Considérons encore les deux intervalles $\left(a, \frac{a+b}{2}\right)$, $\left(\frac{a+b}{2}, b\right)$; la limite supérieure de $f(x)$ dans l'un de ces deux intervalles est nécessairement M. Cet intervalle, appelons-le (a_1, b_1). On a $a_1 \geqslant a, \ b_1 \leqslant b, \ b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$. Nous formerons de même un intervalle (a_2, b_2) $\left(a_2 \geqslant a_1, \ b_2 \leqslant b_1, \ b_2 - a_2 = \frac{b-a}{4}\right)$ dans lequel la limite supérieure de $f(x)$ sera M. Continuons ainsi indéfiniment, et appelons x_0 la limite commune des nombres a_n et b_n pour n infini. Ce nombre x_0 appartient à l'intervalle (a_n, b_n), quel que soit n. Il est impossible que la valeur $f(x_0)$ soit supérieure à M ; montrons qu'elle ne peut être inférieure à ce nombre. Supposons $f(x_0) = \text{M} - \varepsilon$, avec $\varepsilon > 0$. Soit ε' un nombre positif moindre que ε. Comme la fonction $f(x)$ est continue pour $x = x_0$, il existe un nombre η tel que, pour toutes les valeurs de x appartenant à l'intervalle (a, b) et différant de x_0 de moins de

η, on ait

(1) $$f(x) - f(x_0) < \varepsilon'.$$

Or on peut prendre n assez grand pour que la différence $b_n - a_n$ soit moindre que η ; dès lors, toutes les valeurs de x appartenant à l'intervalle (a_n, b_n) vérifieront l'inégalité (1), et, dans cet intervalle, la fonction $f(x)$ restera moindre que $f(x_0) + \varepsilon'$ ou que $M - (\varepsilon - \varepsilon')$. Sa limite supérieure dans cet intervalle est donc au plus égale à $M - (\varepsilon - \varepsilon')$ et ne peut être égale à M. On arrive donc à une contradiction en supposant le nombre $f(x_0)$ inférieur à M. Donc $f(x_0)$ est égal à M.

Si nous nous reportons au sens des expressions : limite supérieure, limite inférieure, nous voyons que, $f(x)$ étant une fonction continue dans un intervalle (a, b), il existe dans cet intervalle deux nombres x_0, x_1 tels que, pour toutes les valeurs de x appartenant à l'intervalle, on ait les deux inégalités

$$f(x) - f(x_0) \leqslant 0, \qquad f(x) - f(x_1) \geqslant 0.$$

Cette proposition nous servira dans le chapitre VI pour établir le théorème de Rolle.

162. Croissance et décroissance. — On dit qu'une fonction $f(x)$ définie dans un intervalle (a, b) est *croissante dans cet intervalle* si, quels que soient les deux nombres x', x'' pris dans cet intervalle, la différence $f(x') - f(x'')$ est différente de zéro et a le signe de $x' - x''$; elle est au contraire *décroissante dans l'intervalle* (a, b) si, quels que soient les deux nombres x', x'' pris dans cet intervalle, la différence $f(x') - f(x'')$ est différente de zéro et a le signe de $x'' - x'$.

Soit $f(x)$ une fonction croissante (ou décroissante) dans l'intervalle (a, b). Faisons croître x depuis a jusqu'à b : toutes les valeurs de la fonction sont comprises entre $f(a)$ et $f(b)$; la fonction ne peut prendre plus d'une fois aucune valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$; enfin, si elle est continue dans l'intervalle (a, b), elle prend une fois et une seule toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$.

Dans les propositions qui vont suivre, on suppose l'intervalle (a, b) tel que chacune des fonctions dont il sera question y soit ou croissante ou décroissante.

1° *Si une fonction* $f(x)$ *est croissante dans l'intervalle* (a, b),

la fonction $f(x)+A$, *A étant une constante, est également croissante dans cet intervalle.* Car appelons $\varphi(x)$ cette fonction $f(x)+A$. Quels que soient les deux nombres x', x'' pris dans l'intervalle (a, b), on a

$$\varphi(x') = f(x') + A, \qquad \varphi(x'') = f(x'') + A,$$

d'où

$$\varphi(x') - \varphi(x'') = f(x') - f(x'').$$

La différence $\varphi(x') - \varphi(x'')$ a donc le signe de $x' - x''$.

On verrait de même que, si $f(x)$ décroît dans l'intervalle (a, b), $f(x)+A$ décroît également dans cet intervalle. On dit, d'une manière abrégée, que les deux fonctions $f(x)$ et $f(x)+A$ *varient dans le même sens.*

2° *Les deux fonctions* $f(x)$ *et* $Af(x)$, *A étant une constante non nulle, varient dans le même sens si A est positive, en sens contraires si A est négative.* Supposons, pour fixer les idées, la fonction $f(x)$ croissante dans l'intervalle (a, b). Désignons par $\varphi(x)$ la fonction $Af(x)$. On a, quels que soient les nombres x', x'' appartenant à l'intervalle (a, b) :

$$\varphi(x') = Af(x'), \qquad \varphi(x'') = Af(x''),$$

d'où

$$\varphi(x') - \varphi(x'') = A[f(x') - f(x'')].$$

$f(x') - f(x'')$ a le signe de $x' - x''$; il en est de même de $\varphi(x') - \varphi(x'')$, si A est positive; si A est négative, la différence $\varphi(x') - \varphi(x'')$ a le signe de $x'' - x'$. La fonction $\varphi(x)$ est croissante dans le premier cas, décroissante dans le second.

En particulier, $f(x)$ et $-f(x)$ varient toujours en sens contraires.

3° *Soit* $f(x)$ *une fonction ne s'annulant pas dans l'intervalle* (a, b) *et conservant dans cet intervalle un signe invariable* (cette seconde condition est une conséquence de la première dans cas où la fonction est continue). *La fonction* $\frac{1}{f(x)}$ *varie en s contraire de* $f(x)$.

Supposons la fonction $f(x)$ croissante, et démontrons que la fonction $\frac{1}{f(x)}$ est décroissante. Appelons $\varphi(x)$ cette dernière fonction. Quels que soient les nombres x', x'' pris dans l'intervalle (a, b), on a

$$\varphi(x') = \frac{1}{f(x')}, \qquad \varphi(x'') = \frac{1}{f(x'')},$$

d'où

$$\varphi(x') - \varphi(x'') = \frac{f(x'') - f(x')}{f(x')f(x'')}.$$

Or le dénominateur de cette fraction est positif, tandis que son numérateur a le signe de $x'' - x'$. La différence $\varphi(x') - \varphi(x'')$ a donc aussi le signe de $x'' - x'$.

4° *Soit* $f(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, ... *plusieurs fonctions qui varient toutes dans le même sens dans l'intervalle* (a, b). *La fonction*

$$f(x) + \varphi(x) + \psi(x) + \cdots$$

varie aussi dans ce sens. Car soit $F(x)$ cette fonction. Supposons les fonctions f, φ, ψ, ... toutes croissantes. On a, quels que soient les deux nombres x', x'' appartenant à l'intervalle (a, b) :

$$F(x') = f(x') + \varphi(x') + \psi(x') + \cdots,$$
$$F(x'') = f(x'') + \varphi(x'') + \psi(x'') + \cdots,$$

d'où

$$F(x') - F(x'') = [f(x') - f(x'')] + [\varphi(x') - \varphi(x'')] + [\psi(x') - \psi(x'')] + \cdots,$$

et comme, par hypothèse, les différences $f(x') - f(x'')$, $\varphi(x') - \varphi(x'')$, $\psi(x') - \psi(x'')$, ... ont toutes le signe de $x' - x''$, la différence $F(x') - F(x'')$ a aussi ce signe.

5° *Soit* $f(x)$ *et* $\varphi(x)$ *deux fonctions dont chacune a un signe invariable dans l'intervalle* (a, b). *Si elles ont le même signe et qu'elles varient dans le même sens, le produit* $f(x) \times \varphi(x)$ *varie dans ce sens commun ou dans le sens contraire, suivant que le signe commun aux deux fonctions est le signe* $+$ *ou le signe* $-$. *Si elles ont des signes contraires et qu'elles varient en sens contraires, alors le produit* $f(x) \times \varphi(x)$ *varie dans le même sens que celle de ces fonctions qui est négative.*

En premier lieu, supposons les deux fonctions positives et croissantes, et montrons que leur produit $F(x)$ est croissant. Quels que soient les deux nombres x', x'' pris dans l'intervalle (a, b), on a

$$F(x') = f(x') \times \varphi(x'), \qquad F(x'') = f(x'') \times \varphi(x''),$$

d'où

$$F(x') - F(x'') = [f(x') - f(x'')]\varphi(x') + [\varphi(x') - \varphi(x'')]f(x''),$$

égalité qui montre que $F(x') - F(x'')$ a le signe de $x' - x''$.

Supposons maintenant les deux fonctions $f(x)$, $\varphi(x)$ croissantes mais négatives; leur produit $f(x) \times \varphi(x)$ peut s'écrire $[-f(x)] \times [-\varphi(x)]$, et, comme les deux fonctions $-f(x)$ et $-\varphi(x)$ sont positives et décroissantes, ce produit sera également décroissant.

Enfin, si la fonction $f(x)$ est croissante et positive, tandis que la fonction $\varphi(x)$ est décroissante et négative, leur produit $F(x)$ est décroissant : car la fonction $-F(x)$, produit des deux fonctions positives et croissantes $f(x)$, $-\varphi(x)$, est croissante.

Cette proposition montre, en particulier, que si une fonction $f(x)$ a un signe invariable dans l'intervalle (a, b), son carré $[f(x)]^2$ varie dans le même sens que $f(x)$ ou en sens contraire, suivant que ce signe invariable est le signe $+$ ou le signe $-$.

Enfin on ne peut rien dire de général sur le produit $f(x) \times \varphi(x)$, ni lorsque les deux fonctions f et φ sont de signes contraires et varient dans le même sens, ni lorsqu'elles ont le même signe et qu'elles varient en sens contraires.

6° Une fonction $f(x)$ est dite *paire* si l'on a, quel que soit x, $f(-x) = f(x)$; elle est dite *impaire* si l'on a, quel que soit x, $f(-x) = -f(x)$.

Pour qu'une fonction entière soit paire, il faut et il suffit que ses termes soient tous de degré pair, et pour qu'elle soit impaire, il faut et il suffit que ses termes soient tous de degré impair.

Si une fonction paire ou impaire est définie dans l'interv[alle] (a, b), $(0 \leqslant a < b)$, elle l'est par cela même dans l'interva[lle] $(-b, -a)$; et, *dans ces deux intervalles, la fonction va[rie] dans le même sens ou en sens contraires, suivant qu'elle*

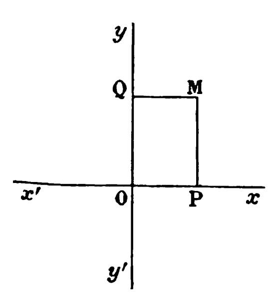
impaire ou paire. Cette remarque permet, dans l'étude des fonctions paires ou impaires, de ne considérer que les valeurs positives de la variable.

163. Maximum et minimum. — On dit qu'une fonction $f(x)$ *passe par un maximum pour* $x = a$, si la valeur qu'elle prend pour $x = a$ est plus grande que les valeurs qu'elle prend pour les valeurs de x voisines de a, c'est-à-dire, d'une façon plus précise, s'il existe un nombre positif ε tel que, pour toutes les valeurs de x, autres que a, appartenant à l'intervalle $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$, on ait l'inégalité $f(x) - f(a) < 0$. Cette condition sera sûrement remplie si la fonction est croissante dans l'intervalle $(a - \varepsilon, a)$ et décroissante dans l'intervalle $(a, a + \varepsilon)$.

De même, on dit qu'une fonction $f(x)$ *passe par un minimum pour* $x = a$, si la valeur qu'elle prend pour $x = a$ est plus petite que les valeurs qu'elle prend pour les valeurs de x voisines de a, c'est-à-dire, d'une façon plus précise, s'il existe un nombre positif ε tel que, pour toutes les valeurs de x, autres que a, appartenant à l'intervalle $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$, on ait $f(x) - f(a) > 0$. Cette condition sera sûrement remplie si la fonction est décroissante dans l'intervalle $(a - \varepsilon,\ a)$ et croissante dans l'intervalle $(a,\ a + \varepsilon)$.

164. Représentation graphique de la marche d'une fonction continue. — Nous commencerons par définir les *coordonnées* d'un point.

Soit $x'x$, $y'y$ deux droites rectangulaires se coupant en O.



Choisissons sur chacune d'elles un sens positif : le sens $x'x$ sur la première, le sens $y'y$ sur la seconde. On suppose, habituellement, le plan de la figure vertical, la première droite horizontale, et, par suite, la seconde droite verticale ; on prend pour sens $x'x$ le sens de gauche à droite, pour sens $y'y$ le sens de bas en haut. Les deux axes $x'x$, $y'y$ s'appellent *les deux*

axes de coordonnées ; $x'x$ est *l'axe des* x, $y'y$ *l'axe des* y.

A un point quelconque M du plan on fait correspondre les deux nombres $a = \overline{OP}$, $b = \overline{OQ}$, P et Q étant les projections orthogonales de M sur $x'x$ et sur $y'y$. Ces deux nombres a, b s'appellent *les coordonnées du point* M : a est *son abscisse*, b *son ordonnée*. Voici les signes de a et de b, suivant la position du point M :

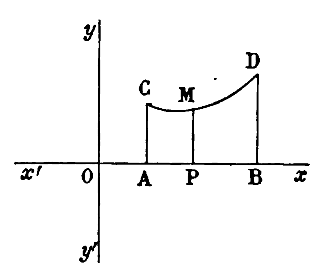
M	est dans	l'angle	xOy :	a	est	positif,	b	est	positif ;
»	»	»	$x'Oy$:	»	»	négatif,	»	»	positif ;
»	»	»	xOy' :	»	»	positif,	»	»	négatif ;
»	»	»	$x'Oy'$:	»	»	négatif,	»	»	négatif.

Ajoutons que, si M est sur l'axe des x, b est nul ; si M est sur l'arc des y, a est nul ; si M est en O, a et b sont tous deux nuls.

Réciproquement, à tout système de deux nombres a, b correspond un point M et un seul ayant a pour abscisse et b pour ordonnée. Car la connaissance de a fixe sans ambiguïté la position de P ; de même, la connaissance de b fixe sans ambiguïté la position de Q ; les perpendiculaires à $x'x$ et à $y'y$ menées respectivement par les points P et Q se coupent en un point M. Ce point a pour abscisse a et pour ordonnée b, et c'est le seul point qui ait pour coordonnées a et b.

On se dispense ordinairement de mener la droite MQ en remarquant que le nombre b est représenté par la valeur algébrique du vecteur PM. La ligne brisée OPM se nomme *le contour des coordonnées du point* M.

Ces définitions données, considérons une fonction $y = f(x)$ continue dans un intervalle (a, b). Marquons les points C et D ayant respectivement pour abscisses a et b, et pour ordonnées $f(a)$ et $f(b)$. Soit maintenant x un nombre quelconque comp entre a et b, et soit y la val correspondante de la foncti



Construisons le point M ayant x pour abscisse et y pour ord née. A cause de la continuité de la fonction $f(x)$, l'ensemble d

points M que l'on fait ainsi correspondre aux différents nombres appartenant à l'intervalle (a, b) forme une ligne CMD allant de C en D. On dit de cette ligne qu'*elle représente la marche de la fonction* $f(x)$, *x croissant de a à b*. On dit aussi que $y = f(x)$ est l'*équation de la ligne* CMD. Si cette ligne est tracée avec soin, elle rend intuitif le sens de la variation de $f(x)$. Imaginons qu'un mobile la parcoure de gauche à droite, c'est-à-dire de manière que son abscisse aille constamment en croissant : tant que ce mobile s'élève, la fonction croît; s'il s'abaisse, elle décroît.

Si $f(x)$ est une fonction paire, la ligne admet Oy comme axe de symétrie, et, si $f(x)$ est impaire, elle admet le point O comme centre de symétrie.

Pour étudier une fonction, on s'efforce de partager les intervalles dans lesquels elle est définie en intervalles partiels dans chacun desquels elle soit ou constante ou croissante ou décroissante. Les maxima et les minima de la fonction se trouvent ainsi mis en évidence. Enfin, on cherche les valeurs que prend la fonction pour les valeurs de x qui limitent ces intervalles.

EXERCICES

1. Trouver la limite, pour $x = 1$, de la fonction

$$\frac{\frac{n(n+1)}{2}x^n - nx^{n-1} - (n-1)x^{n-2} - \cdots - 2x - 1}{x-1}.$$

2. Quels sont les intervalles dans lesquels la fonction $x - \sqrt{x^2 - x - 2}$ est définie ? Que devient-elle quand x augmente indéfiniment : 1° par valeurs positives ; 2° par valeurs négatives ?

3. Mêmes questions pour la fonction

$$\frac{2x+3}{5x+\sqrt{x^2-4}}.$$

4. Trouver la limite, pour $x = 0$, de la fonction

$$\frac{\sqrt{x^2+ax+a^2} - \sqrt{x^2-ax+a^2}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}} \qquad (a > 0).$$

5. Classer, suivant la valeur de a, les racines des deux équations

$$x^2 + x - 1 = 0, \qquad ax^2 + x - a = 0.$$

Voir ce que deviennent les racines de la seconde équation : 1° quand a tend vers 0 ; 2° quand a augmente indéfiniment.

6. L'équation

$$\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\dots+\frac{A_p}{x-a_p}-\frac{A_{p+1}}{x-a_{p+1}}-\frac{A_{p+2}}{x-a_{p+2}}-\dots-\frac{A_m}{x-a_m}+\lambda=0,$$

où tous les nombres $A_1, A_2, \dots, A_m$ et λ sont positifs, et où l'on a

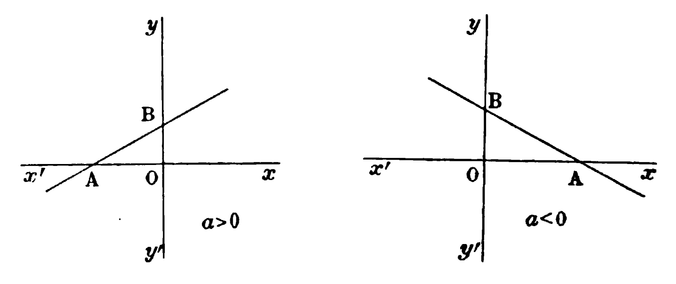
$$a_1 < a_2 < \dots < a_p < a_{p+1} < \dots < a_m,$$

admet m racines. — Qu'arrive-t-il pour $\lambda = 0$?

III. — ÉTUDE DE QUELQUES FONCTIONS SIMPLES

165. Fonction $ax+b$ $(a \neq 0)$. — C'est la plus simple de toutes les fonctions entières. Comme toute fonction entière, elle est définie et continue dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$. Elle varie dans le même sens que ax : elle est donc croissante ou décroissante, suivant que a est positif ou négatif. x augmentant indéfiniment par valeurs positives, y augmente indéfiniment par valeurs positives, si a est positif; par valeurs négatives, si a est négatif. x augmentant indéfiniment par valeurs négatives, y augmente indéfiniment par valeurs négatives, si a est positif ; par valeurs positives, si a est négatif.

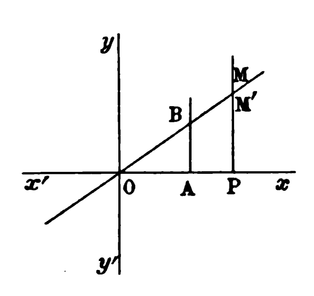
En résumé, x croissant de $-\infty$ à $+\infty$, y croit aussi de $-\infty$ à $+\infty$, si a est positif; tandis que, si a est négatif, y décroît de $+\infty$ à $-\infty$. Voici la ligne représentant la marche de la fonction :



Cette ligne va constamment en s'élevant dans le premier cas

en s'abaissant dans le second. Elle rencontre l'axe des x au point A d'abscisse $-\frac{b}{a}$, l'axe des y au point B d'ordonnée b. (Sur les figures ci-dessus, on a supposé b positif.)

Il est facile de démontrer que *cette ligne est une droite*. Supposons d'abord $b = 0$, de sorte que l'équation devient $y = ax$. Prenons sur $x'x$ le point A tel que $\overline{OA}$ soit égal à $+1$, puis, sur la perpendiculaire à Ox menée par A, le point B tel que $\overline{AB}$ soit égal à a. Les deux points O et B appartiennent à la ligne ayant $y=ax$ pour équation ; montrons que cette ligne est la droite OB.

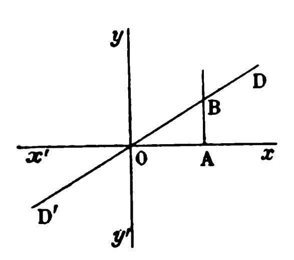


Soit en effet P un point quelconque de $x'x$ $(\overline{OP} = x)$; sur la perpendiculaire à $x'x$ menée par P prenons le point M tel que $\overline{PM}$ soit égal à ax, et soit M' le point de rencontre de cette perpendiculaire avec OB. L'homothétie des deux triangles OAB, OPM' donne

$$\frac{\overline{PM'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OA}}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{\overline{PM'}}{a} = \frac{x}{1},$$

d'où $\overline{PM'} = ax = \overline{PM}$. Les points M et M' sont donc confondus. Le point M est donc bien sur la droite OB.

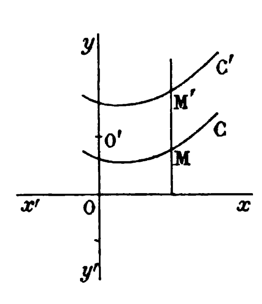
Réciproquement, toute droite passant par l'origine, sauf Oy, peut être représentée par une équation de la forme $y = ax$. Car soit D'D une telle droite. Soit de nouveau A le point de $x'x$ d'abscisse $+1$, et appelons B le point de rencontre de D'D avec la parallèle à Oy menée par A. L'équation $y = \overline{AB} \times x$ représente la droite D'D. En particulier l'axe des x est représenté par l'équation $y = 0$.



Si a est positif, la droite D'D représentée par l'équation $y = ax$ est située dans les angles

xOy, $x'Oy'$; si a est négatif, elle est située dans les angles xOy', $x'Oy$. Supposons que a dépende d'une variable t, et que, t tendant vers t_1, a augmente indéfiniment. Alors la longueur AB (voir les figures précédentes) augmente indéfiniment, et l'angle aigu de D'D avec $y'y$ tend vers 0. La droite D'D tend donc à se placer sur l'axe des y quand t tend vers t_1.

Supposons maintenant $b \neq 0$. Imaginons, d'une manière générale, qu'on ait construit la ligne C ayant pour équation $y = f(x)$, et soit C' la ligne ayant pour équation $y = f(x) + b$. M et M' étant des points de ces deux lignes ayant la même abscisse x, on a $\overline{MM'} = b$: la ligne C' se déduit donc de la ligne C par la translation rectiligne OO', O' étant le point de l'axe des y tel que $\overline{OO'}$ soit égal à b. Or l'équation $y = ax$ représente une droite D passant par O : donc l'équation $y = ax + b$ représente la droite D' parallèle à D menée par O'.



Réciproquement, toute droite D' non parallèle à Oy peut être représentée par une équation de la forme $y = ax + b$. Car soit O' le point de rencontre de D' avec Oy, et soit D la parallèle à D' menée par O. $y = ax$ étant l'équation de D, $y = ax + \overline{OO'}$ sera l'équation de D'.

Cherchons en particulier l'équation de la droite P'P" qui joint deux points donnés P'(x', y') et P"(x'', y''). Nous supposons $x' \neq x''$. Il suffit de résoudre par rapport à a et à b les deux équations

$$y' = ax' + b, \qquad y'' = ax'' + b.$$

On en tire

$$a = \frac{y' - y''}{x' - x''}, \qquad b = y' - \frac{y' - y''}{x' - x''}x',$$

de sorte que la droite P'P" a pour équation

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x').$$

166. Plus généralement, le lieu géométrique des points dont les coordonnées vérifient l'équation $ax+by+c=0$ (a et b n'étant pas nuls simultanément) est une droite. Car, si b est différent de 0, cette équation peut s'écrire $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ et représente une droite; si b est égal à 0, l'équation devient $x=-\frac{c}{a}$ et représente la parallèle à Oy dont tous les points ont pour abscisse $-\frac{c}{a}$.

Cette remarque permet d'interpréter géométriquement les résultats de la discussion, faite dans le chapitre II, d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues.

Considérons le système

$$(1)\qquad ax+by+c=0, \qquad a'x+b'y+c'=0.$$

Ces deux équations représentent respectivement deux droites D et D'. Si le système (1) admet la solution $x=x'$, $y=y'$, les deux droites ont en commun le point (x', y'); réciproquement, si les deux droites ont en commun le point (x', y'), le système (1) admet la solution $x=x'$, $y=y'$.

Cela posé, si $ab'-a'b$ est différent de 0, le système (1) admet une solution unique. Les droites D, D' sont donc concourantes, et leur point de rencontre a pour coordonnées

$$x'=-\frac{cb'-c'b}{ab'-a'b}, \qquad y'=-\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}.$$

Si $ab'-a'b$ est égal à 0, $cb'-c'b$ et $ac'-a'c$ n'étant pas nuls simultanément, les équations (1) sont incompatibles, et les deux droites n'ont pas de point commun : elles sont parallèles.

Si enfin les nombres $ab'-a'b$, $cb'-c'b$, $ac'-a'c$ sont tous les trois nuls, les deux équations (1) sont équivalentes, et les deux droites D, D' sont confondues.

167. Fonction ax^2+bx+c $(a \neq 0)$. — Elle est continue dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$. Pour étudier le sens de sa variation, écrivons-la ainsi :

$$(1)\qquad y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+k, \qquad \text{avec} \qquad k=\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

Sous cette forme, on voit qu'elle varie dans le même sens que $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$, et par conséquent dans le même sens que $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ ou dans le sens contraire, suivant que a est positif ou négatif. Or la fonction $x+\frac{b}{2a}$ est croissante dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$; elle est d'ailleurs négative pour $x<-\frac{b}{2a}$ et positive pour $x>-\frac{b}{2a}$: la fonction $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ est donc décroissante dans l'intervalle $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$ et croissante dans l'intervalle $\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$. Il en est de même de y si a est positif; tandis que, si a est négatif, y croît dans le premier intervalle et décroît dans le second. Enfin y augmente indéfiniment en même temps que x, et cela par valeurs positives ou par valeurs négatives, suivant que a est positif ou négatif.

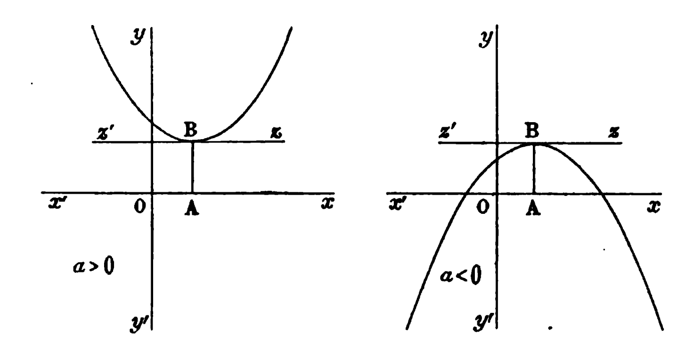
Il résulte de ce qui précède que, pour $x=-\frac{b}{2a}$, y passe par un maximum ou par un minimum : *c'est un maximum si a est négatif, un minimum si a est positif*, et k est la valeur de ce maximum ou de ce minimum. On pouvait voir immédiatement, à l'aide de l'expression (1) de y, que k est, dans le premier cas, la plus grande valeur de y, et, dans le second, la plus petite.

En résumé, on a le tableau suivant :

$(a>0)$					
x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
y	$+\infty$	décroit	k *minimum.*	croit	$+\infty$

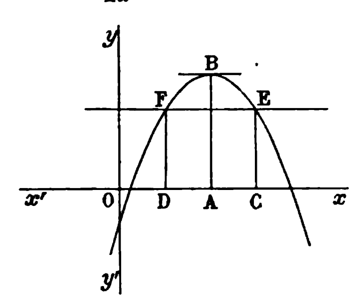
$(a<0)$					
x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
y	$-\infty$	croit	k *maximum.*	décroît	$-\infty$

Voici maintenant la ligne représentant la variation de y :



On a pris $\overline{OA} = -\frac{b}{2a}$, $\overline{AB} = k$, et on a supposé $\overline{OA}$ et $\overline{AB}$ positifs.

En se reportant à la forme sous laquelle on a mis la fonction y, on voit qu'à deux valeurs de x équidistantes de $-\frac{b}{2a}$, $-\frac{b}{2a}-\alpha$ et $-\frac{b}{2a}+\alpha$, correspondent deux valeurs de y égales toutes deux à $a\alpha^2+k$. Il suit de là que la ligne représentant la marche de la fonction y admet la droite $x = -\frac{b}{2a}$ comme axe de symétrie. Construisons, en effet, les deux points de la ligne correspondant à ces deux valeurs de x. Les points C et D de $x'x$ tels qu'on ait



$$\overline{OC} = -\frac{b}{2a}+\alpha,$$

$$\overline{OD} = -\frac{b}{2a}-\alpha$$

sont symétriques par rapport au point A, car on a

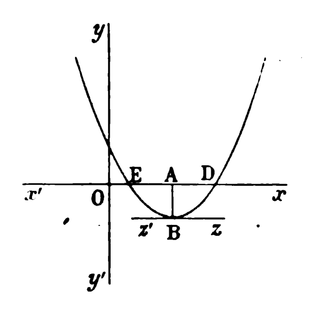
$$\overline{AC} = +\alpha, \qquad \overline{AD} = -\alpha, \qquad \overline{AC}+\overline{AD} = 0.$$

Les perpendiculaires à $x'x$ menées par ces points C, D sont

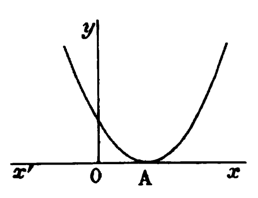
donc symétriques par rapport à AB. Enfin les points E, F de ces droites tels qu'on ait $\overline{CE} = \overline{DF} = a\alpha^2 + k$ sont également symétriques par rapport à AB : les points de la ligne sont donc bien deux à deux symétriques par rapport à AB.

Supposons a positif. Il résulte de la continuité de la fonction que, x croissant de $-\infty$ à $+\infty$, la fonction passe deux fois par chaque valeur supérieure à k; elle ne prend qu'une fois la valeur k; enfin elle ne prend aucune valeur inférieure à k. Ces résultats sont rendus intuitifs de la manière suivante : imaginons qu'on ait construit la ligne L représentant la marche d'une fonction $f(x)$, x croissant de a à b. Les valeurs de x appartenant à l'intervalle (a, b) pour lesquelles $f(x)$ prend une valeur donnée λ sont les abscisses des points communs à la ligne L et à la parallèle à $x'x$ dont tous les points ont pour ordonnée λ. Il suffit donc de compter ces points pour savoir combien de fois $f(x)$ prend la valeur λ. Dans le cas présent, si nous nous reportons à la première figure, nous voyons que toute parallèle à $x'x$ située au-dessus de $z'z$ a deux points communs avec la ligne; $z'z$ n'a en commun avec la ligne que le point B; enfin une parallèle à $x'x$ située au-dessous de $z'z$ ne rencontre pas la ligne.

Cherchons en particulier combien de fois la fonction prend la valeur 0. Cela dépend du signe de k, qui est celui de $4ac - b^2$. Si $4ac - b^2$ est supérieur à 0, la fonction ne s'annule jamais et reste positive quel que soit x (c'est le cas de la première figure). Si $4ac - b^2$ est inférieur à 0, la fonction s'annule pour deux valeurs de x, x_1 et x_2; la ligne coupe $x'x$ en deux points D, E, symétriques par rapport à A; la fonction y est positive dans l'intervalle $(-\infty, x_1)$, négative dans l'intervalle (x_1, x_2), de nouveau positive dans l'intervalle $(x_2, +\infty)$. Enfin si $4ac - b^2$ est égal à 0, la fonction ne s'annule que pour $x = -\dfrac{b}{2a}$; la ligne



a en commun avec $x'x$ le seul point A ; y est positive pour toute valeur de x autre que $-\frac{b}{2a}$.



Nous retrouvons ainsi, dans le cas de a positif, des résultats démontrés directement dans le chapitre III. On ferait une discussion analogue en supposant a négatif.

Remarquons enfin que, si $4ac - b^2$ est inférieur à 0, la valeur de x qui fait passer la fonction par un maximum ou par un minimum est $\frac{x_1 + x_2}{2}$, x_1 et x_2 étant les deux racines du trinome $ax^2 + bx + c$, et que, si $4ac - b^2$ est égal à 0, cette valeur de x est celle qui annule le trinome. Cette remarque sert toutes les fois que l'on peut trouver les racines du trinome sans être obligé de l'ordonner.

168. Proposons-nous maintenant d'étudier la variation de la fonction y lorsque x croît, non de $-\infty$ à $+\infty$, mais de α à β. On cherchera la position de $-\frac{b}{2a}$ par rapport à α et à β.

Pour $-\frac{b}{2a} < \alpha$, y est croissante ou décroissante dans l'intervalle (α, β), suivant que a est positif ou négatif.

Pour $\alpha < -\frac{b}{2a} < \beta$, y est décroissante dans l'intervalle $\left(\alpha, -\frac{b}{2a}\right)$ et croissante dans l'intervalle $\left(-\frac{b}{2a}, \beta\right)$, si a est positif; tandis que, si a est négatif, elle est croissante dans le premier intervalle et décroissante dans le second.

Enfin pour $\beta < -\frac{b}{2a}$, y décroît ou croît dans l'intervalle (α, β), suivant que a est positif ou négatif.

169. Applications. — 1° Étudier la variation du produit de deux nombres variables dont la somme est constante.

Soit a la valeur constante de la somme des deux nombres. x désignant l'un de ces nombres, l'autre sera $a - x$, et la

fonction à étudier est $x(a-x)$. C'est une fonction entière et du second degré, qui s'annule pour $x=0$ et pour $x=a$, et dans laquelle le coefficient de x^2 est -1. Cette fonction est donc croissante dans l'intervalle $\left(-\infty, \frac{a}{2}\right)$, décroissante dans l'intervalle $\left(\frac{a}{2}, +\infty\right)$; elle est maxima pour $x=\frac{a}{2}$. D'ailleurs $\frac{a}{2}$ est la valeur unique de x pour laquelle les deux nombres x, $a-x$ soient égaux ; on voit donc que *le produit de deux nombres variables dont la somme est constante est maximum quand ces deux nombres sont égaux.*

2° Quel est, suivant la valeur de λ, le nombre des racines de l'équation

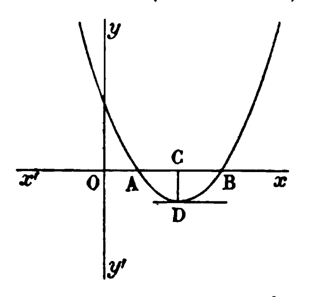
(1) $$(x-a)(x-b)=\lambda\,? \qquad (a<b).$$

Pour le voir, étudions la fonction

$$y=(x-a)(x-b),$$

et cherchons combien de fois, x croissant de $-\infty$ à $+\infty$, elle prend la valeur λ. y est une fonction entière et du second degré, qui s'annule pour $x=a$ et pour $x=b$, et dans laquelle le coefficient de x^2 est $+1$. Cette fonction est donc décroissante dans l'intervalle $\left(-\infty, \frac{a+b}{2}\right)$ et croissante dans l'intervalle $\left(\frac{a+b}{2}, +\infty\right)$. Pour $x=\frac{a+b}{2}$, elle passe par un minimum, et la valeur de ce minimum est

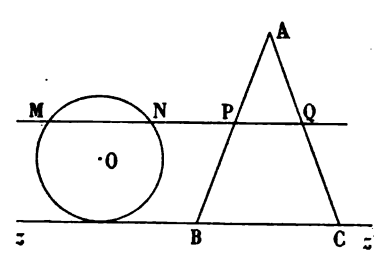
$$k=\left(\frac{a+b}{2}-a\right)\left(\frac{a+b}{2}-b\right)=-\frac{(a-b)^2}{4}.$$



Si donc λ est inférieur à k, l'équation (1) n'a aucune racine; si λ est égal à k, elle admet la racine double $\frac{a+b}{2}$; si λ est supérieur à k, elle admet deux racines distinctes x_1 et x_2. Dans ce dernier cas, si λ est négatif, on a $a<x_1<x_2<b$; si λ est nul, on a $x_1=a$ et

$x_2 = b$; enfin si λ est positif, on a $x_1 < a < b < x_2$. Ces résultats deviennent intuitifs au moyen de la ligne ci-dessus qui représente la variation de y.

3° On donne une droite zz', et, d'un même côté de cette droite, un cercle O de rayon R tangent à zz' et un triangle ABC dont la base BC est égale à a et dont la hauteur est égale à 3R. Une parallèle à zz' coupe le cercle en M, N et les côtés AB, AC du triangle en P, Q. Etudier la variation de $\overline{MN}^2 + \overline{PQ}^2$.



Appelons x la distance des deux droites zz' et MNPQ, et y la somme $\overline{MN}^2 + \overline{PQ}^2$. On a

$$PQ = \frac{a(3R - x)}{3R}, \qquad \overline{MN}^2 = 4x(2R - x),$$

et par suite

$$y = \frac{a^2}{9R^2}(3R - x)^2 + 4x(2R - x),$$

ou, en ordonnant,

$$y = \frac{1}{9R^2}[(a^2 - 36R^2)x^2 - 6(a^2 - 12R^2)Rx + 9a^2R^2].$$

x croissant de $-\infty$ à $+\infty$, y passe, pour $x = \frac{3(a^2 - 12R^2)R}{a^2 - 36R^2} = x_1$, par un maximum si $a^2 - 36R^2$ est < 0, par un minimum si $a^2 - 36R^2$ est > 0. Mais nous n'avons à faire varier x que de 0 à 2R. Voyons donc la position de x_1 par rapport à 0 et 2R. L'inégalité $x_1 > 0$ équivaut à $(a^2 - 12R^2)(a^2 - 36R^2) > 0$; elle a lieu pour $a^2 < 12R^2$ et pour $a^2 > 36R^2$. L'inégalité $x_1 < 2R$ équivaut à $x_1 - 2R < 0$, ou $R\frac{a^2 + 36R^2}{a^2 - 36R^2} < 0$; elle a lieu pour $a^2 < 36R^2$. Ainsi, pour $a^2 < 12R^2$, on a $0 < x_1 < 2R$; pour $12R^2 < a^2 < 36R^2$, on a $x_1 < 0$; pour $a^2 > 36R^2$, on a $x_1 > 2R$.

Voici dès lors le tableau qui indique la variation de y :

$(a^2 < 12R^2)$

x	0		x_1		$2R$
y	a^2	croît	$y_1 = \dfrac{12R^2(a^2+12R^2)}{36R^2-a^2}$ *maximum.*	décroît	$\dfrac{a^2}{9}$

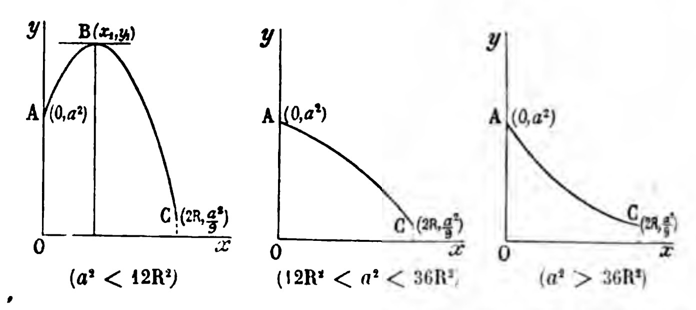
$(12R^2 < a^2 < 36R^2)$

x	0		$2R$
y	a^2	décroît	$\dfrac{a^2}{9}$

$(a^2 > 36R^2)$

x	0		$2R$
y	a^2	décroît	$\dfrac{a^2}{9}$

La ligne représentant la marche de la fonction a la forme suivante :



Une fois qu'on a construit cette ligne, on peut immédiatement indiquer le nombre des solutions du problème que voici : mener à la droite zz' une parallèle telle que $\overline{MN}^2 + \overline{PQ}^2$ soit égale à λ. Il suffit de compter les points d'intersection de la ligne avec la parallèle à Ox dont l'ordonnée est λ. On voit ainsi que, pour $a^2 < 12R^2$, le problème est impossible si λ est plus petit que $\dfrac{a^2}{9}$ ou plus grand que y_1; il admet une solution si λ est compris entre $\dfrac{a^2}{9}$ et a^2, et deux solutions si λ est compris entre a^2 et y_1. Pour $a^2 > 12R^2$, le problème est impossible si λ est plus petit que $\dfrac{a^2}{9}$ ou plus grand que a^2,

et il admet une solution et une seule si λ est compris entre $\dfrac{a^2}{9}$ et a^2. Nous retrouvons ainsi, d'une manière indirecte, les résultats de la discussion faite dans le chapitre III.

170. Fonction $\dfrac{ax+b}{a'x+b'}$, $(a' \neq 0)$. — Si $ab' - a'b$ est nul, la valeur de x, $-\dfrac{b'}{a'}$, qui annule le dénominateur annule aussi le numérateur ; on a dès lors $y = \dfrac{a\left(x+\dfrac{b'}{a'}\right)}{a'\left(x+\dfrac{b'}{a'}\right)}$, et la fonction y est, comme on le savait d'ailleurs déjà, égale à $\dfrac{a}{a'}$ pour toute valeur de x autre que $-\dfrac{b'}{a'}$.

Supposons $ab' - a'b \neq 0$, et étudions d'abord la fonction $y = \dfrac{1}{ax+b}$, $(a \neq 0)$. Elle est définie et continue dans les deux intervalles

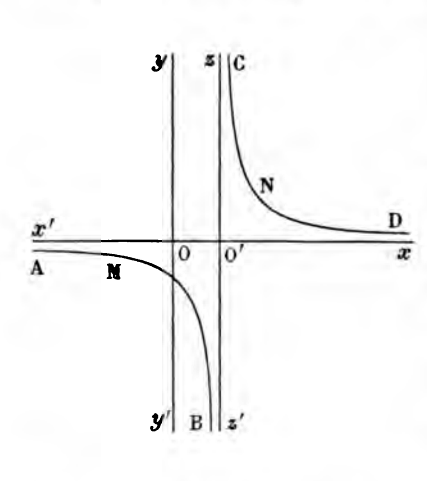
$$\left(-\infty,\ -\frac{b}{a}-\varepsilon\right), \qquad \left(-\frac{b}{a}+\varepsilon,\ +\infty\right).$$

Dans chacun de ces intervalles, le dénominateur $ax+b$ ne s'annule pas et conserve un signe invariable : donc y varie en sens contraire de ce dénominateur. La fonction y est donc décroissante si a est positif et croissante si a est négatif. Elle tend vers zéro quand x augmente indéfiniment, et saute de $-\infty$ à $+\infty$ ou de $+\infty$ à $-\infty$ quand x atteint et dépasse la valeur $-\dfrac{b}{a}$, suivant que a est positif ou négatif. On a donc le tableau suivant :

$(a > 0)$						
x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$			$+\infty$
y	0	décroit	$-\infty$	$+\infty$	décroit	0

$(a < 0)$						
x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$			$+\infty$
y	0	croit	$+\infty$	$-\infty$	croit	0

La ligne ci-dessous représente la marche de y dans le cas où a est > 0. Elle se compose de deux parties AMB, CND, ayant chacune *deux branches infinies*. Si un point s'éloigne à l'infini sur l'une des branches MA, ND, sa distance à $x'x$ tend vers zéro; c'est ce qu'on exprime en disant que ces deux branches sont *asymptotes* à $x'x$. De même, si un point s'éloigne à l'infini sur l'une des branches MB, NC, son abscisse tend vers $-\frac{b}{a}$, et par conséquent sa distance à la droite $z'z$ d'équation $x = -\frac{b}{a}$ tend vers zéro : ces deux branches sont donc asymptotes à $z'z$.



Remarquons enfin qu'à deux valeurs de x équidistantes de $-\frac{b}{a}$, $-\frac{b}{a}-\alpha$ et $-\frac{b}{a}+\alpha$, correspondent deux valeurs de y opposées, $-\frac{1}{a\alpha}$ et $+\frac{1}{a\alpha}$; à ces deux valeurs de x correspondent sur la ligne deux points symétriques par rapport à O'. Le point O' est donc un centre de symétrie.

Arrivons à la fonction $y = \frac{ax+b}{a'x+b'}$ $(a' \neq 0,\ ab'-a'b \neq 0)$. Elle est définie et continue dans les intervalles

$$\left(-\infty,\ -\frac{b'}{a'}-\varepsilon\right), \qquad \left(-\frac{b'}{a'}+\varepsilon,\ +\infty\right).$$

On ramène l'étude de cette fonction à celle de la fonction $y = \frac{1}{ax+b}$ en divisant $ax+b$ par $a'x+b'$; on trouve $\frac{a}{a'}$

pour quotient et $b - \frac{ab'}{a'}$ pour reste ; on a donc

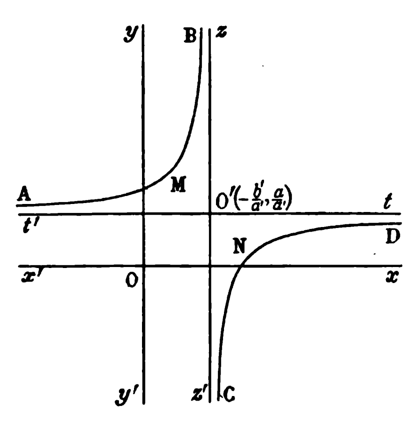
$$y = \frac{a}{a'} + \frac{b - \frac{ab'}{a'}}{a'x + b'} = \frac{a}{a'} - (ab' - a'b)\frac{1}{a'(a'x + b')}.$$

y varie donc dans le même sens que $-(ab' - a'b)\frac{1}{a'(a'x + b')}$, et par suite dans le même sens que $a'(a'x + b')$ ou en sens contraire, selon que $ab' - a'b$ est positif ou négatif. Si $ab' - a'b$ est > 0, la fonction y croît dans les deux intervalles où elle est définie et continue. Si $ab' - a'b$ est < 0, elle décroît dans ces deux intervalles. On a donc le tableau suivant :

$(ab' - a'b > 0)$						
x	$-\infty$		$-\frac{b'}{a'}$			$+\infty$
y	$\frac{a}{a'}$	croît	$+\infty$	$-\infty$	croît	$\frac{a}{a'}$

$(ab' - a'b < 0)$						
x	$-\infty$		$-\frac{b'}{a'}$			$+\infty$
y	$\frac{a}{a'}$	décroît	$-\infty$	$+\infty$	décroît	$\frac{a}{a'}$

On voit ici la ligne représentant la marche de la fonction dans le cas où $ab' - a'b$ est > 0. Les deux branches MB, NC sont asymptotes à la parallèle à $y'y$, $z'z$, d'abscisse $-\frac{b'}{a'}$. Quant aux deux branches MA, ND, elles sont asymptotes, non à $x'x$, mais à la parallèle à $x'x$, $t't$, d'ordonnée $\frac{a}{a'}$. Comme précédemment, le point de rencontre O' des deux asymptotes, point d'abscisse $-\frac{b'}{a'}$ et d'ordonnée $\frac{a}{a'}$, est centre de la ligne :



car à deux valeurs de x équidistantes de $-\frac{b'}{a'}$, $-\frac{b'}{a'}-\alpha$ et $-\frac{b'}{a'}+\alpha$, correspondent deux valeurs de y équidistantes de $\frac{a}{a'}$, $\frac{a}{a'}+\frac{ab'-a'b}{a'^2\alpha}$ et $\frac{a}{a'}-\frac{ab'-a'b}{a'^2\alpha}$.

171. Fonction $\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$, a et a' n'étant pas nuls simultanément. — Nous allons étudier cette fonction dans les trois cas particuliers suivants :

1° $$R = 0;$$

2° $$R \neq 0, \qquad a' = 0;$$

3° $$R \neq 0, \qquad a' \neq 0, \qquad ab' - a'b = 0,$$

avec

$$R = (ab' - a'b)(bc' - b'c) - (ac' - a'c)^2.$$

Dans le premier cas, on est ramené à des fonctions connues. Supposons $aa' \neq 0$; si $ab' - a'b$ est $\neq 0$, il existe une valeur de x, $\frac{ca' - c'a}{ab' - a'b} = x'$, annulant à la fois le numérateur et le dénominateur de y. On a alors

$$y = \frac{(x - x')(ax + \beta)}{(x - x')(a'x + \beta')},$$

$$\beta = ax' + b, \qquad \beta' = a'x' + b',$$

d'où

$$a\beta' - a'\beta = ab' - a'b,$$

et, pour toute valeur de x autre que x', la fonction y a la même valeur que la fonction déjà étudiée

$$\frac{ax + \beta}{a'x + \beta'}, \qquad a\beta' - a'\beta \neq 0.$$

Si $ab' - a'b$ est égal à 0, on a l'identité

$$ax^2 + bx + c \equiv \frac{a}{a'}(a'x^2 + b'x + c'),$$

et, pour toute valeur de x n'annulant pas le dénominateur, y a la valeur constante $\frac{a}{a'}$.

On vérifie sans peine que ces conclusions subsistent pour $a = 0$, $a' \neq 0$.

Enfin, pour $a' = 0$, $ab' \neq 0$, on a

$$ax^2 + bx + c \equiv \left(x + \frac{c'}{b'}\right)(ax + \gamma), \qquad \gamma = b - a\frac{c'}{b'},$$

et, pour toute valeur de x autre que $-\frac{c'}{b'}$, y a la même valeur que $\frac{ax + \gamma}{b'}$.

172. Pour traiter le second cas, nous commencerons par étudier la fonction

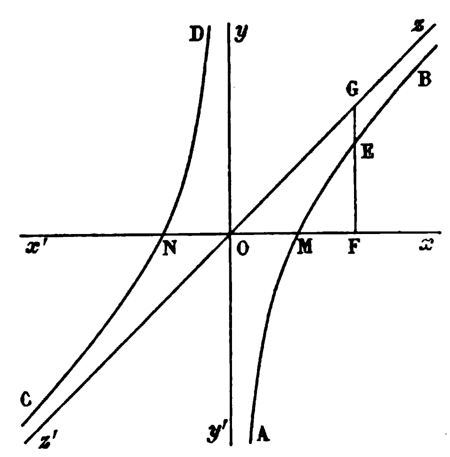
$$y = x + \frac{m}{x}, \qquad m \neq 0.$$

Cette fonction étant impaire, il suffit de donner à x des valeurs positives. Nous l'étudierons donc seulement dans l'intervalle $(+\varepsilon, +\infty)$ où elle est définie et continue. La fonction $\frac{m}{x}$ varie dans le même sens que $\frac{1}{x}$ ou en sens contraire, suivant que m est positif ou négatif. Nous sommes ainsi amenés à distinguer deux cas.

Le cas le plus simple est celui où m est < 0. Alors la fonction $\frac{m}{x}$ croît dans l'intervalle $(+\varepsilon, +\infty)$, et il en est de même de y. y augmente indéfiniment par valeurs négatives ou par valeurs positives, selon que x tend vers 0 ou augmente indéfiniment par valeurs positives.

La ligne AMB représente la variation de la fonction dans l'intervalle $(+\varepsilon, +\infty)$. La branche infinie MA est asymptote à $y'y$; le point M où AMB coupe l'axe des x a pour abscisse $+\sqrt{m}$. Soit $z'z$ la bissectrice des angles xOy, $x'Oy'$. Nous allons montrer que AMB est dans l'angle $y'Oz$ et que la branche infinie MB est asymptote à Oz.

Soit en effet E un point quelconque de AMB ; appelons F et G les points où la parallèle à $y'y$ menée par E rencontre $x'x$ et $z'z$; on a :



$$\overline{OF} = x,$$

$$\overline{FE} = x + \frac{m}{x},$$

$$\overline{FG} = x$$

(car Oz est bissectrice de $\widehat{xOy}$). Donc

$$\overline{GE} = \overline{FE} - \overline{FG} = \frac{m}{x},$$

qui est négatif. Le point E est donc au-dessous de G, et la ligne AMB est tout entière dans l'angle $y'Oz$. Enfin la longueur $GE = -\frac{m}{x}$ tend vers zéro quand x augmente indéfiniment, c'est-à-dire quand E s'éloigne à l'infini sur MB ; *a fortiori* la distance du point E à Oz tend vers zéro, et la branche MB est asymptote à Oz. La ligne CND, qui représente la variation de la fonction dans l'intervalle $(-\infty, -\varepsilon)$, est symétrique de AMB par rapport au point O, d'après une remarque déjà faite.

Supposons maintenant m positif. Alors y a évidemment le même signe que x. Par suite y varie dans le même sens que y^2, puisque x est positif. Or on peut écrire

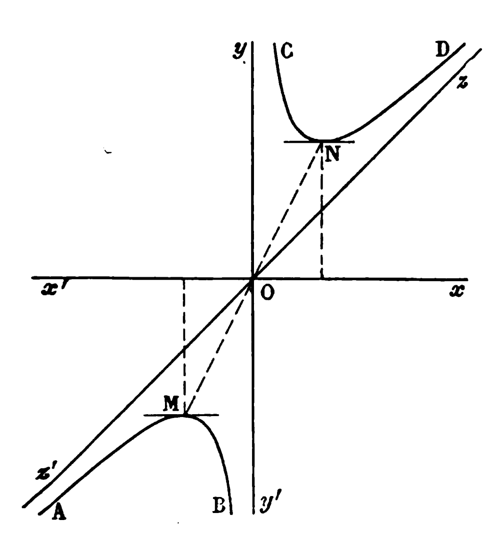
$$y^2 = \left(x - \frac{m}{x}\right)^2 + 4m.$$

Dans l'intervalle $(+\varepsilon, +\infty)$, la fonction $x - \frac{m}{x}$ croit ; elle est négative pour $x < +\sqrt{m}$, positive pour $x > +\sqrt{m}$. La fonction y^2 est donc décroissante dans l'intervalle $(+\varepsilon, +\sqrt{m})$ et croissante dans l'intervalle $(+\sqrt{m}, +\infty)$, et il en est de même de y. Enfin y augmente indéfiniment par valeurs posi-

tives quand x tend vers 0 ou augmente indéfiniment par valeurs positives.

En résumé, on a le tableau suivant :

$(m > 0)$										
x	$-\infty$		$-\sqrt{m}$		0			$+\sqrt{m}$		$+\infty$
y	$-\infty$	cr.	$-2\sqrt{m}$ *max.*	décr.	$-\infty$	$+\infty$	décr.	$+2\sqrt{m}$ *min.*	cr.	$+\infty$



On voit ici la ligne qui représente la variation de y ; les deux branches MB, NC sont asymptotes à $y'y$; les deux branches MA, ND sont asymptotes à $z'z$; seulement la ligne est située dans les angles $y'Oz'$, yOz. Dans le cas où m était < 0, toute parallèle à $x'x$ coupait la ligne en deux points; tandis que, dans le cas présent, une parallèle à $x'x$ dont l'ordonnée est comprise entre $-2\sqrt{m}$ et $+2\sqrt{m}$ n'a aucun point commun avec la ligne. L'origine est encore un centre de symétrie.

Remarque. — Nous venons d'étudier la variation de la somme de deux nombres positifs variables dont le produit est constant. En effet, si l'on appelle m ce produit, et x l'un des nombres, l'autre est $\frac{m}{x}$, et leur somme est $x + \frac{m}{x}$. Cette somme est minima pour $x = \sqrt{m}$; or, pour $x = \sqrt{m}$, les deux termes de la somme sont égaux, et pour toute autre valeur positive de x, ils sont différents. On a donc la proposition suivante :

La somme de deux nombres positifs variables dont le produit est constant est minima quand ces nombres sont égaux.

Arrivons au cas général :

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{b'x + c'}, \qquad R \neq 0.$$

a est certainement $\neq 0$. Pour $b' = 0$, on est ramené à une fonction connue ; soit donc $b' \neq 0$. Nous pouvons toujours supposer b' positif : car si b' était négatif, nous commencerions par mettre y sous la forme

$$\frac{-ax^2 - bx - c}{-b'x - c'}.$$

Divisons le numérateur $ax^2 + bx + c$ par le dénominateur $b'x + c'$; nous obtiendrons un quotient du 1er degré $\alpha x + \beta$ $\left(\alpha = \frac{a}{b'}\right)$ et un reste γ qui n'est pas nul, car $R \neq 0$ signifie que le numérateur ne s'annule pas pour $x = -\frac{c'}{b'}$. On a donc

(1) $$y = \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{b'x + c'},$$

ce qu'on peut écrire

$$y = \frac{\alpha}{b'}\left(b'x + c' + \frac{m}{b'x + c'}\right) + \delta,$$

en posant

$$m = \frac{\gamma b'}{\alpha} = \frac{\gamma b'^2}{a}, \qquad \delta = \beta - \frac{\alpha c'}{b'}.$$

On en tire

$$y = \frac{\alpha}{b'}\left(z + \frac{m}{z}\right) + \delta, \qquad \text{avec} \qquad z = b'x + c'.$$

Puisque b' est positif, x croissant de $-\infty$ à $+\infty$, z croît également de $-\infty$ à $+\infty$. Pour $x = -\frac{c'}{b'}$, z s'annule, et la fonction est discontinue. Nous savons comment varie $z + \frac{m}{z}$ quand x croît de $-\infty$ à $-\frac{c'}{b'} - \varepsilon$, puis de $-\frac{c'}{b'} + \varepsilon$ $+\infty$; y varie dans le même sens ou en sens contraire, suivan que $\frac{\alpha}{b'} = \frac{a}{b'^2}$ est positif ou négatif.

173. Pour traiter le troisième cas, nous commencerons par étudier la fonction

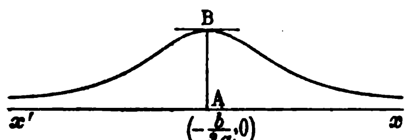
$$y = \frac{1}{ax^2+bx+c}, \qquad a \neq 0.$$

Supposons, pour fixer les idées, a positif, et subdivisons ce cas en trois autres, suivant le signe de $4ac - b^2$:

1° $4ac - b^2 > 0$. y est alors continue dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$. Le dénominateur, qui n'est jamais nul, décroît dans l'intervalle $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$ et croît dans l'intervalle $\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$; la fonction y croît donc dans le premier intervalle et décroît dans le second. x augmentant indéfiniment, y tend vers 0. On a donc le tableau suivant :

$(4ac - b^2 > 0)$						
	x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
	y	0	croît	$\frac{4a}{4ac-b^2}$ *maximum.*	décroît	0

La ligne représentant la marche de y est figurée ci-contre. Nous



n'avons pas marqué l'axe des y. A est le point de l'axe des x dont l'abscisse est $-\frac{b}{2a}$, et la longueur AB est égale à $\frac{4a}{4ac-b^2}$. La droite AB est un axe de symétrie de la ligne, car à deux valeurs de x équidistantes de $-\frac{b}{2a}$ correspondent deux valeurs égales de y. Cette conclusion subsiste dans les deux cas suivants.

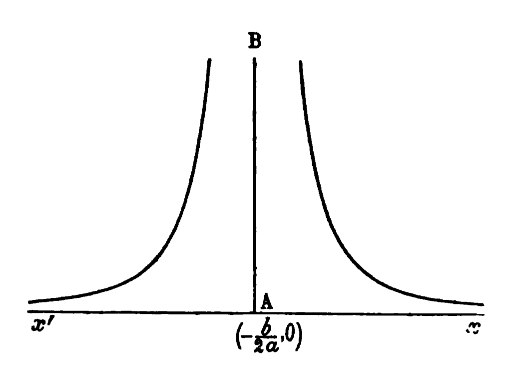
2° Supposons $4ac - b^2 = 0$. Alors y devient infinie pour $x = -\frac{b}{2a}$; elle est continue dans les deux intervalles

$$\left(-\infty, -\frac{b}{2a} - \varepsilon\right), \qquad \left(-\frac{b}{2a} + \varepsilon, +\infty\right).$$

Le dénominateur décroît sans s'annuler dans le premier intervalle, croît sans s'annuler dans le second : donc y croît dans le premier intervalle et décroît dans le second. x tendant vers $-\frac{b}{2a}$, y augmente indéfiniment par valeurs positives ; x augmentant indéfiniment, y tend vers 0. On a donc le tableau suivant :

$(4ac - b^2 = 0)$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$			$+\infty$
y	0	croît	$+\infty$	$+\infty$	décr.	0



La ligne représentant la marche de y a la forme ci-contre. C'est la précédente dans laquelle le point le plus haut, B, s'est éloigné à l'infini.

3° Enfin supposons $4ac - b^2 < 0$. Alors $ax^2 + bx + c$ s'annule pour deux valeurs de x ; appelons x_1 la plus petite de ces deux valeurs et x_2 la plus grande. Ces deux valeurs de x rendent y infinie ; y est continue dans les trois intervalles

$$(-\infty, \quad x_1 - \varepsilon), \quad (x_1 + \varepsilon, \quad x_2 - \varepsilon), \quad (x_2 + \varepsilon, \quad +\infty).$$

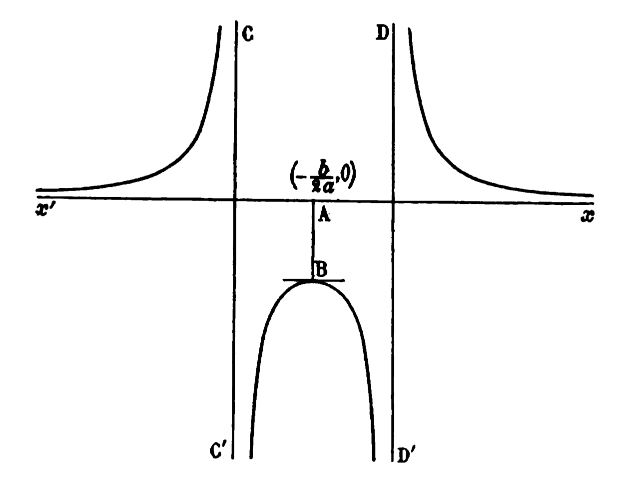
Le dénominateur de y décroît sans s'annuler dans le premier intervalle et croît sans s'annuler dans le troisième : donc y croît dans le premier intervalle et décroît dans le troisième. Le second intervalle comprend la valeur $-\frac{b}{2a} = \frac{x_1 + x_2}{2}$; $ax^2 + bx + c$ décroît sans s'annuler dans l'intervalle $\left(x_1 + \varepsilon, \quad -\frac{b}{2a}\right)$ et croît sans s'annuler dans l'intervalle $\left(-\frac{b}{2a}, \quad x_2 - \varepsilon\right)$: y croît donc dans le premier de ces intervalles et décroît dans le second.

x atteignant et dépassant la valeur x_1, y saute de $+\infty$ à $-\infty$; x atteignant et dépassant la valeur x_2, y saute de $-\infty$ à $+\infty$; enfin, x augmentant indéfiniment, y tend vers 0. En résumé, on a le tableau suivant :

x	$-\infty$		x_1			$-\frac{b}{2a}$		x_2			$+\infty$
$(4ac-b^2<0)$											
y	0	cr.	$+\infty$	$-\infty$	cr.	$\frac{4a}{4ac-b^2}$	décr.	$-\infty$	$+\infty$	décr.	0

maximum.

Dans le cas actuel, la ligne représentant la marche de y admet



trois asymptotes : d'abord $x'x$ (comme dans les deux cas précédents), ensuite les deux parallèles à $y'y$, C'C, D'D, d'abscisses x_1 et x_2. La longueur AB, égale à $-\frac{4a}{4ac - b^2}$, doit être portée au-dessous de l'axe des x.

On peut ramener à ce cas particulier l'étude de la fonction $y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$, $R \neq 0$, $a' \neq 0$, lorsque $ab' - a'b$ est égal à 0. Car divisons $ax^2 + bx + c$ par $a'x^2 + b'x + c'$; nous obtiendrons le quotient $\frac{a}{a'}$ et le reste $-\frac{ac' - a'c}{a'}$. Ce reste n'est pas nul, sans quoi R serait nul. Dès lors on a

$$y = \frac{a}{a'} - \frac{ac' - a'c}{a'(a'x^2 + b'x + c')} = \frac{a}{a'} - (ac' - a'c)\frac{1}{a'(a'x^2 + b'x + c')}.$$

y varie donc dans le même sens que

$$-(ac' - a'c)\frac{1}{a'(a'x^2 + b'x + c')},$$

et nous sommes ramenés au cas précédent. La forme de la ligne représentant la marche de y dépend du signe de $4a'c' - b'^2$. Cette ligne est asymptote non à l'axe des x, mais à la parallèle à $x'x$ d'ordonnée $\frac{a}{a'}$, et elle admet pour axe de symétrie la parallèle à $y'y$ d'abscisse $-\frac{b'}{2a'}$.

174. Il nous reste à étudier la fonction

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$$

dans le cas général, c'est-à-dire en supposant différents de 0 les trois nombres R, a', $ab' - a'b$. Nous ne ferons la discussion complète que dans le chapitre VI. Nous nous bornerons pour le moment à indiquer un moyen élémentaire de la faire.

Si l'on divise $ax^2 + bx + c$ par $a'x^2 + b'x + c'$, on obtient le quotient $\frac{a}{a'}$ et le reste $-\frac{1}{a'}[(ab' - a'b)x + ac' - a'c]$. On a donc

$$y = \frac{a}{a'} - \frac{(ab' - a'b)x + ac' - a'c}{a'(a'x^2 + b'x + c')},$$

ce qu'on peut écrire ainsi :

$$y = \frac{a}{a'} - \frac{1}{u}, \qquad \text{avec} \qquad u = \frac{a'(a'x^2 + b'x + c')}{(ab' - a'b)x + ac' - a'c}.$$

Or nous savons étudier la variation de cette fonction u. Dans un intervalle dans lequel u est continue et ne s'annule pas y est continue et varie en sens contraire de $\frac{1}{u}$, et par suite dans le même sens que u.

EXERCICES

1. Étudier la variation de la fonction

$$y = (px + q)^2 + (p'x + q')^2.$$

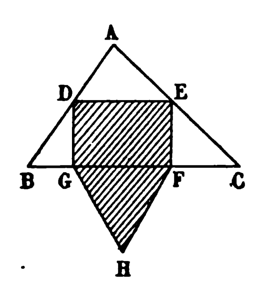
Application : calculer la distance du point (a, b) à la droite $y = mx + n$, ou, plus généralement, à la droite $Ax + By + C = 0$.

2. Étudier la variation de la fonction

$$y = (px + q)^2 + (p'x + q')^2 + (p''x + q'')^2.$$

3. Trouver un trinome du second degré s'annulant pour $x = a$, $x = b$, et admettant k pour maximum ou minimum.

4. On donne deux axes rectangulaires $x'x$, $y'y$, et, sur $x'x$, deux points A et A', l'un sur Ox, l'autre sur Ox', et dont les distances au point O sont a et a' $(a > a')$. On considère deux cercles ayant pour centres respectifs A, A', et se coupant orthogonalement sur $y'y$. La droite d'abscisse x les coupe en B, C, B', C' : étudier la variation de $y = \overline{BC}^2 + \overline{B'C'}^2$.



5. On considère un triangle ABC dont le côté BC est égal à a et la hauteur correspondante égale à h. On mène DE parallèle à BC, à une distance x de BC ; on construit le rectangle DEFG, puis le triangle équilatéral FGH, et on demande d'étudier la variation de l'aire du pentagone DEFHG, x croissant de 0 à h.

6. On donne un cercle de rayon R, tangent à une droite Δ, et sur Δ deux points B, C dont la distance est égale à 2R ; enfin un point A situé par rapport à Δ du même côté que le cercle et à une distance h de Δ. On mène une parallèle à Δ, qui coupe le cercle en M et N et les deux droites AB, AC en P et Q : étudier la variation de la somme $\overline{MN}^2 + \overline{PQ}^2$.

7. Étudier la variation de la fonction $x^4 + px^2 + q$.

8. On donne un cercle O et on considère un point P mobile sur une droite passant par le centre. On mène du point P les tangentes PA et PB, et on trace les cercles tangents au cercle O et inscrits dans l'angle APB : étudier la variation des rayons de ces cercles.

9. On donne deux axes rectangulaires $x'x$, $y'y$ et un cercle I de rayon R tangent à $x'x$ au point O. Sur $x'x$ on fait glisser une portion de droite AB de longueur constante $2a$. Soit ω le centre du cercle passant par les points A et B, et tangent au cercle I : étudier la variation de l'ordonnée du point ω, en prenant pour variable indépendante l'abscisse de ce point.

10. Etudier la variation de la fonction

$$y = \frac{x^2 + 2x + 2}{3x + 1}.$$

11. Deux troncs de pyramide à bases carrées, l'un de première, l'autre de seconde espèce, ont leurs deux bases communes ; l'une de ces bases a un côté constant a, l'autre un côté variable x : étudier la variation du rapport des volumes.

CHAPITRE V

FONCTIONS EXPONENTIELLE, LOGARITHMIQUE ET CIRCULAIRES

I. — ÉTUDE DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

175. Soit a un nombre *positif* que nous supposerons différent de l'unité. On définit, en arithmétique, l'expression a^x, dans laquelle x est un nombre arithmétique rationnel. Si x est un entier positif m, a^x est le produit de m nombres égaux à a ; si x est une fraction positive $\frac{p}{q}$, l'expression a^x représente le même nombre que l'expression $\sqrt[q]{a^p}$, c'est-à-dire le nombre arithmétique dont la puissance $q^{ième}$ est égale à a^p. Enfin on convient que le symbole a^0 représente l'unité, quel que soit a. On démontre que, quels que soient les nombres rationnels positifs x et x', on a :

$$a^x \times a^{x'} = a^{x+x'}, \qquad (a^x)^{x'} = a^{xx'}.$$

Cela posé, considérons la fraction $\frac{a^x}{a^{x'}}$, dans laquelle x et x' sont deux nombres rationnels positifs. Si x est plus grand que x', elle est égale à $a^{x-x'}$, car on a : $a^{x-x'} \times a^{x'} = a^{x-x'+x'} = a^x$. Si x est égal à x', elle est égale à 1. Or, dans ce cas, l'expression $a^{x-x'}$ représente le nombre 1. Donc, pour $x \geqslant x'$, on a : $\frac{a^x}{a^{x'}} = a^{x-x'}$.

Supposons maintenant $x < x'$. Alors $a^{x'} = a^x \times a^{x'-x}$ et la fraction $\frac{a^x}{a^{x'}}$ est égale à $\frac{1}{a^{x'-x}}$. *Convenons* de représenter une fraction de la forme $\frac{1}{a^m}$, m étant rationnel et positif, par le symbole a^{-m}. Alors nous écrirons, au lieu de $\frac{1}{a^{x'-x}}$, $a^{-(x'-x)}$ ou $a^{x-x'}$; de sorte que l'égalité $\frac{a^x}{a^{x'}} = a^{x-x'}$ sera valable, quels que soient les nombres rationnels et positifs x et x'.

Remarquons immédiatement que, en vertu de la convention précédente, les deux expressions $\frac{1}{a^m}$ et a^{-m} représenteront le même nombre, alors même que m sera un nombre rationnel négatif $-m'$. Car on a $a^{-m} = a^{m'}$, $\frac{1}{a^m} = \frac{1}{a^{-m'} \text{ ou } \frac{1}{a^{m'}}} = a^{m'}$.

176. L'expression a^x est donc maintenant définie pour toutes les valeurs rationnelles de x. Il reste à la définir quand x est irrationnel. Pour cela, nous nous servirons des remarques suivantes.

1° *Quel que soit le nombre rationnel x, le nombre a^x est positif.*

2° Supposons $a > 1$. Alors le nombre a^x est plus grand que 1 si x est positif. Car, si x est un nombre entier m, a^x est le produit de m facteurs supérieurs à 1, et si x est une fraction $\frac{p}{q}$, a^x est un nombre dont la puissance $q^{ième}$ est supérieure à 1. Si x est négatif, a^x est plus petit que 1; car soit $x = -x'$; on a $a^x = \frac{1}{a^{x'}}$, et nous venons de voir que $a^{x'}$ est plus grand que 1. Le contraire a lieu pour $a < 1$: c'est pour x positif que a^x est plus petit que 1 et pour x négatif que a^x est plus grand que 1. On peut résumer cette remarque en disant que *la différence $a^x - 1$ a le signe de x ou le sig[ne] de $-x$, suivant que a est plus grand ou plus petit que* 1. Cet[te] proposition n'est qu'un cas particulier d'une proposition plu[s] générale que nous établirons bientôt.

3° *Quels que soient les nombres rationnels x et x', on a*

$$a^x \times a^{x'} = a^{x+x'}.$$

Cette égalité a été démontrée en arithmétique dans le cas où x et x' sont tous deux positifs. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Appelons ρ et ρ' leurs valeurs absolues, et distinguons deux cas, suivant que x et x' sont l'un positif et l'autre négatif, ou tous deux négatifs.

Si d'abord x est égal à ρ et x' à $-\rho'$, on a

$$a^x \times a^{x'} = a^\rho \times \frac{1}{a^{\rho'}} = \frac{a^\rho}{a^{\rho'}} = a^{\rho-\rho'} = a^{x+x'}.$$

Supposons maintenant que x soit égal à $-\rho$ et x' à $-\rho'$. On a alors

$$a^x \times a^{x'} = \frac{1}{a^\rho} \times \frac{1}{a^{\rho'}} = \frac{1}{a^\rho \times a^{\rho'}} = \frac{1}{a^{\rho+\rho'}} = a^{-(\rho+\rho')} = a^{x+x'}.$$

De là résulte que, quels que soient les nombres rationnels x et x', on a

$$\frac{a^x}{a^{x'}} = a^{x-x'}.$$

Car on a

$$a^{x'} \times a^{x-x'} = a^{x'+x-x'} = a^x.$$

4° *Quels que soient les nombres rationnels x et x', la différence $a^x - a^{x'}$ a le signe de $x - x'$ ou le signe de $x' - x$, suivant que a est plus grand ou plus petit que* 1.

On a, en effet, d'après ce qui précède,

$$a^x = a^{(x-x')+x'} = a^{x-x'} \times a^{x'},$$

et par suite

$$a^x - a^{x'} = a^{x'}(a^{x-x'} - 1).$$

Or, en vertu de la première remarque, $a^{x'}$ est positif, et, en vertu de la seconde, $a^{x-x'} - 1$ a le signe de $x - x'$ ou le signe de $x' - x$, suivant que a est plus grand ou plus petit que 1. La proposition est donc établie.

177. La définition que nous allons donner de a^x dans le cas où x est irrationnel est construite de manière à être applicable dans le cas où x est rationnel. Pour fixer les idées, nous supposerons a plus grand que 1.

Soit x un nombre quelconque, rationnel ou irrationnel. Appelons α un nombre rationnel quelconque plus petit que x, et β un nombre rationnel quelconque plus grand que x. Le nombre a^α est plus petit que le nombre a^β, car la différence $a^\beta - a^\alpha$ a le même signe que $\beta - \alpha$. Il est donc possible qu'il existe un nombre A qui soit à la fois supérieur à tous les nombres a^α et inférieur à tous les nombres a^β ; en tout cas, il ne saurait y avoir plus d'un tel nombre. Car s'il y en avait deux, A et B $(A < B)$, la différence $a^\beta - a^\alpha$ resterait toujours supérieure à $B - A$; or nous allons montrer que, quel que soit le nombre positif ε, on peut choisir α et β de manière que la différence $a^\beta - a^\alpha$ soit moindre que ε.

Pour cela, désignons par m un entier positif quelconque, et considérons la suite

$$\ldots, \frac{-2}{m}, \frac{-1}{m}, 0, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \ldots .$$

Il y a dans cette suite deux termes dont les rangs diffèrent de deux unités et qui comprennent x :

$$\frac{p-1}{m} < x < \frac{p+1}{m}.$$

Prenons $\alpha = \frac{p-1}{m}$, $\beta = \frac{p+1}{m}$, et montrons que, pour des valeurs de m suffisamment grandes, on a

$$a^{\frac{p+1}{m}} - a^{\frac{p-1}{m}} < \varepsilon, \qquad \text{ou} \qquad a^{\frac{p-1}{m}}\left(a^{\frac{2}{m}} - 1\right) < \varepsilon.$$

Soit γ un nombre rationnel fixe plus grand que x. Puisque a est plus grand que 1, a^γ est plus grand que $a^{\frac{p-1}{m}}$; l'inégalité précédente sera donc vérifiée *a fortiori* si la suivante l'est :

$$a^\gamma\left(a^{\frac{2}{m}} - 1\right) < \varepsilon.$$

Or cette dernière inégalité peut s'écrire

$$\left(1 + \frac{\varepsilon}{a^\gamma}\right)^m > a^2,$$

et nous avons démontré qu'il existe un nombre r tel qu'elle soit vérifiée pour toutes les valeurs de m supérieures à r.

Il reste à démontrer l'existence du nombre A. Il n'y a matière à démonstration que si aucun nombre *rationnel* n'est supérieur à tous les nombres a^α et inférieur à tous les nombres a^β. Dans ce cas, partageons l'ensemble des nombres rationnels en deux classes de la manière suivante. Considérons un nombre rationnel quelconque. De deux choses l'une : ou bien il est inférieur à tous les nombres a^β sans être supérieur à tous les nombres a^α, et alors nous le rangerons dans la première classe ; ou bien il est supérieur à tous les nombres a^α sans être inférieur à tous les nombres a^β, et alors nous le rangerons dans la seconde classe. Nous allons montrer que cette séparation des nombres rationnels en deux classes possède les propriétés énoncées au nº 129.

En effet :

1° Tout nombre a' de la première classe est plus petit que tout nombre b' de la seconde classe. Car il existe des nombres rationnels α et β tels qu'on ait

$$a' \leqslant a^\alpha, \qquad a^\beta \leqslant b', \qquad \alpha < x < \beta;$$

par suite, on a

$$a^\alpha < a^\beta, \qquad \text{et } a \text{ fortiori} \qquad a' < b'.$$

2° Il n'y a pas dans la première classe de nombre plus grand que tous les autres. Car soit a' un nombre de la première classe. Il existe un nombre rationnel α tel qu'on ait

$$a' \leqslant a^\alpha, \qquad \alpha < x;$$

soit α' un nombre rationnel compris entre α et x, et soit a'' un nombre rationnel compris entre a^α et $a^{\alpha'}$. Ce nombre a'' appartient à la première classe et est plus grand que a'.

3° On démontre de même qu'il n'y a pas dans la seconde classe de nombre plus petit que tous les autres.

Il y a donc, d'après le nº 129, un nombre irrationnel A (et un seul) supérieur à tous les nombres de la première classe et inférieur à tous les nombres de la seconde classe. Ce nombre A est supérieur à tous les nombres a^α et inférieur à tous les nombres a^β. Car, quel que soit le nombre a^α considéré, il existe

(on l'a vu précédemment) dans la première classe un nombre a'' supérieur à a^{α}, et comme A est supérieur à a'', on en conclut que A est supérieur à a^{α}. On démontre de même que A est inférieur à tous les nombres a^{β}.

L'existence d'un nombre A supérieur à tous les nombres a^{α} et inférieur à tous les nombres a^{β} se trouve ainsi démontrée. Si x est rationnel, ce nombre A est le nombre a^x ; si x est irrationnel, a^x représente, par définition, ce nombre A.

Si a était plus petit que 1, a^x serait inférieur aux nombres a^{α} et supérieur aux nombres a^{β}.

178. Nous avons donc défini dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ une nouvelle fonction

$$y = a^x.$$

On l'appelle la *fonction exponentielle.*

Voici les principales propriétés de cette fonction :

I. *Quel que soit x, le nombre a^x est positif.* Car, si a est supérieur à 1, en désignant par α un nombre rationnel inférieur à x, on a

$$a^x > a^{\alpha},$$

et comme a^{α} est positif, a^x l'est aussi. Si l'on avait $0 < a < 1$, en désignant par β un nombre rationnel supérieur à x, on aurait

$$a^x > a^{\beta} > 0.$$

II. *La différence $a^x - 1$ a le signe de $+x$ ou le signe de $-x$, suivant que a est supérieur ou inférieur à 1.*

Pour fixer les idées, supposons $a > 1$. Soit α un nombre rationnel plus petit que x et β un nombre rationnel plus grand que x. On a

$$a^{\alpha} < a^x < a^{\beta}.$$

Si x est positif, on peut supposer positif le nombre rationnel α : dès lors a^{α} est plus grand que 1, et il en est de même *a fortiori* de a^x. Si, au contraire, x est négatif, on peut supposer négatif le nombre rationnel β : dès lors a^{β} est plus petit que 1, et il en est de même *a fortiori* de a^x.

III. *Quels que soient les deux nombres x et x', on a*

$$a^x \times a^{x'} = a^{x+x'}.$$

Supposons encore $a > 1$. Tout revient à démontrer que, quels que soient les deux nombres rationnels α'', β'', l'un inférieur, l'autre supérieur à $x + x'$, on a

$$a^{\alpha''} < a^x \times a^{x'} < a^{\beta''},$$

car il n'y a que le nombre $a^{x+x'}$ qui soit à la fois supérieur à tous les nombres $a^{\alpha''}$ et inférieur à tous les nombres $a^{\beta''}$. Or le nombre α'' est la somme d'un nombre rationnel α moindre que x et d'un nombre rationnel α' moindre que x' ; on a donc

$$a^{\alpha''} = a^{\alpha+\alpha'} = a^{\alpha} \times a^{\alpha'} ;$$

on a d'ailleurs

$$a^{\alpha} < a^x, \qquad a^{\alpha'} < a^{x'},$$

et par suite

$$a^{\alpha''} < a^x \times a^{x'}.$$

Pareillement, le nombre β'' est la somme d'un nombre rationnel β supérieur à x et d'un nombre rationnel β' supérieur à x' ; on a donc

$$a^{\beta''} = a^{\beta+\beta'} = a^{\beta} \times a^{\beta'} ;$$

on a d'ailleurs

$$a^{\beta} > a^x, \qquad a^{\beta'} > a^{x'},$$

et par suite

$$a^{\beta''} > a^x \times a^{x'}.$$

Si, dans l'égalité

$$a^x \times a^{x'} = a^{x+x'},$$

on fait $x' = -x$, on obtient

$$a^x \times a^{-x} = a^0 = 1,$$

ce qui montre que, quel que soit x, les deux expressions a^{-x} et $\frac{1}{a^x}$ désignent le même nombre.

Il résulte encore de ce qui précède que, quels que soient les nombres x, x', on a

$$\frac{a^x}{a^{x'}} = a^{x-x'}.$$

L'égalité $a^x \times a^{x'} = a^{x+x'}$ se généralise sur-le-champ : quels que soient les nombres x, x', x'', ..., on a

$$a^x \times a^{x'} \times a^{x''} \times \cdots = a^{x+x'+x''+\cdots}.$$

IV. En raisonnant comme plus haut, on déduit de ce qui précède que, *quels que soient les nombres x et x', la différence $a^x - a^{x'}$ a le signe de $x - x'$ ou le signe de $x' - x$, suivant que a est supérieur ou inférieur à 1.* On peut énoncer cette proposition en disant que la fonction $y = a^x$ est *croissante* dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$, si a est plus grand que 1; *décroissante* dans ce même intervalle, si a est compris entre 0 et 1.

V. *Quels que soient les deux nombres x et x', on a*

$$(a^x)^{x'} = a^{xx'}.$$

Cette égalité est évidente dans le cas particulier où l'un des deux nombres x, x' est nul. Elle se démontre en arithmétique lorsque ces deux nombres sont positifs et rationnels. S'ils sont positifs et si, de plus, l'un d'eux au moins est irrationnel, tout revient à démontrer (en supposant $a > 1$) que, quels que soient les deux nombres rationnels α'', β'', l'un inférieur, l'autre supérieur à xx', on a

$$a^{\alpha''} < (a^x)^{x'} < a^{\beta''},$$

car il n'y a que le nombre $a^{xx'}$ qui soit supérieur à tous les nombres $a^{\alpha''}$ et inférieur à tous les nombres $a^{\beta''}$. Si α'' est négatif, l'inégalité $a^{\alpha''} < (a^x)^{x'}$ est évidente. Si le nombre α'' est positif, il est le produit de deux nombres rationnels positifs α, α', l'un moindre que x, l'autre moindre que x'. L'inégalité $x' > \alpha'$ entraîne l'inégalité $(a^x)^{x'} > (a^x)^{\alpha'}$, puisque a^x est plus grand que 1. On a d'ailleurs $(a^x)^{\alpha'} > (a^\alpha)^{\alpha'}$ [1] ou $a^{\alpha''}$, et par suite $(a^x)^{x'} > a^{\alpha''}$. On démontrerait de même l'inégalité $(a^x)^{x'} < a^{\beta''}$.

Supposons maintenant que x et x' ne soient pas tous deux

---

(1) Car soit $\alpha' = \frac{p'}{q'}$. On a $(a^x)^{\alpha'} = \sqrt[q']{(a^x)^{p'}}$, $(a^\alpha)^{\alpha'} = \sqrt[q']{(a^\alpha)^{p'}}$. Il s'agit donc de prouver que $(a^x)^{p'}$ est supérieur à $(a^\alpha)^{p'}$, ce qui est évident, puisque, x étant plus grand que α, a^x est plus grand que a^α.

positifs ; désignons par ρ et par ρ' leurs valeurs absolues, et subdivisons ce cas en plusieurs autres.

1° x est égal à ρ et x' à $-\rho'$. On a alors

$$(a^x)^{x'} = (a^\rho)^{-\rho'} = \frac{1}{(a^\rho)^{\rho'}} = \frac{1}{a^{\rho\rho'}} = a^{-\rho\rho'} = a^{xx'}.$$

2° x est égal à $-\rho$ et x' à ρ'. Il s'agit de prouver que l'on a

$$(a^{-\rho})^{\rho'} = a^{-\rho\rho'}.$$

Supposons d'abord $\rho = 1$. L'égalité à démontrer est alors la suivante :

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{\rho'} = \frac{1}{a^{\rho'}}, \quad \text{ou bien} \quad a^{\rho'} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{\rho'}}.$$

Supposons $a > 1$. Tout revient à démontrer que, quels que soient les deux nombres rationnels α', β', l'un inférieur, l'autre supérieur à ρ', on a

$$a^{\alpha'} < \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{\rho'}} < a^{\beta'},$$

car il n'y a que le nombre $a^{\rho'}$ qui soit supérieur à tous les nombres $a^{\alpha'}$ et inférieur à tous les nombres $a^{\beta'}$. Si α' est négatif, l'inégalité $a^{\alpha'} < \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{\rho'}}$ est évidente. Supposons α' positif. L'inégalité $\alpha' < \rho'$ entraîne l'inégalité $\left(\frac{1}{a}\right)^{\alpha'} > \left(\frac{1}{a}\right)^{\rho'}$, car $\frac{1}{a}$ est plus petit que 1. On a d'ailleurs $\left(\frac{1}{a}\right)^{\alpha'} = \frac{1}{a^{\alpha'}}$ (1), et par suite $\frac{1}{a^{\alpha'}} > \left(\frac{1}{a}\right)^{\rho'}$ ou $a^{\alpha'} < \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{\rho'}}$. C'est la première

---

(1) Car soit $\alpha' = \frac{p'}{q'}$. On a

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{\alpha'} = \sqrt[q']{\left(\frac{1}{a}\right)^{p'}} = \sqrt[q']{\frac{1}{a^{p'}}} = \frac{1}{\sqrt[q']{a^{p'}}} = \frac{1}{a^{\alpha'}}.$$

des inégalités que nous voulions établir. On démontrerait de même la seconde, $a^{\rho'} > \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{a}\right)^{\rho'}}$.

Rien n'est plus facile maintenant que de démontrer l'égalité

$$(a^{-\rho})^{\rho'} = a^{-\rho\rho'},$$

car on a

$$(a^{-\rho})^{\rho'} = \left(\frac{1}{a^{\rho}}\right)^{\rho'} = \frac{1}{(a^{\rho})^{\rho'}} = \frac{1}{a^{\rho\rho'}} = a^{-\rho\rho'}.$$

3° x est égal à $-\rho$ et x' à $-\rho'$. On a alors

$$(a^{x})^{x'} = (a^{-\rho})^{-\rho'} = \frac{1}{(a^{-\rho})^{\rho'}} = \frac{1}{a^{-\rho\rho'}} = a^{\rho\rho'} = a^{xx'}.$$

Il résulte de là que, quel que soit le nombre x, on a

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{x} = (a^{-1})^{x} = a^{-x} = \frac{1}{a^{x}}.$$

179. *La fonction exponentielle est continue quel que soit x.* Démontrons d'abord qu'elle est continue pour $x = 0$, autrement dit que a^x tend vers 1 quand x tend vers 0. Pour fixer les idées, nous supposerons $a > 1$.

Si x est positif, a^x est plus grand que 1. Montrons que, quel que soit le nombre positif ε, on a, pour x suffisamment petit : $a^x - 1 < \varepsilon$, ou $a^x < 1 + \varepsilon$. $1 + \varepsilon$ étant > 1, il existe un nombre entier positif N tel qu'on ait $(1 + \varepsilon)^N > a$, ou $a^{\frac{1}{N}} < 1 + \varepsilon$; pour $0 < x < \frac{1}{N}$, on a : $0 < a^x - 1 < \varepsilon$. C'est dire que a^x est continue à droite pour $x = 0$.

Si x est négatif, posons $x = -x'$; x' est positif, et on a $a^x = \frac{1}{a^{x'}} < 1$. Montrons que, quel que soit le nombre positif ε, on a, pour x suffisamment petit en valeur absolue : $1 - a^x < \varepsilon$, ou $1 - \frac{1}{a^{x'}} < \varepsilon$, ou $\frac{1}{a^{x'}} > 1 - \varepsilon$, ou enfin $a^{x'} < \frac{1}{1-\varepsilon}$. $\frac{1}{1-\varepsilon}$ étant > 1, il existe un nombre entier positif N′ te qu'on ait $\left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right)^{N'} > a$, ou $a^{\frac{1}{N'}} < \frac{1}{1-\varepsilon}$. Pour $x' < \frac{1}{N'}$

on a $a^{x'} < \frac{1}{1-\varepsilon}$. Donc, pour $-\frac{1}{N'} < x < 0$, on a $0 < 1 - a^x < \varepsilon$. C'est dire que a^x est continue à gauche pour $x = 0$.

La fonction a^x est donc continue pour $x = 0$.

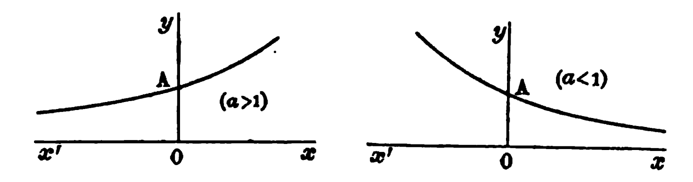
Il résulte de là qu'elle est continue pour toute valeur x_0 de la variable. Car la différence $a^x - a^{x_0}$ est égale à $a^{x_0}(a^{x-x_0} - 1)$; x tendant vers x_0, a^{x_0} reste constant, tandis que $a^{x-x_0} - 1$ tend vers zéro : donc la différence $a^x - a^{x_0}$ tend vers zéro.

180. Enfin que devient a^x lorsque x augmente indéfiniment? Supposons d'abord $a > 1$; *alors a^x augmente indéfiniment quand x augmente indéfiniment par valeurs positives et tend vers zéro quand x augmente indéfiniment par valeurs négatives*. En effet, quel que soit le nombre positif A, il existe un nombre entier positif B tel que a^B soit supérieur à A. L'inégalité $x > B$ entraîne l'inégalité $a^x > A$. De même, quel que soit le nombre positif ε, il existe un entier positif B' tel que l'on ait $a^{B'} > \frac{1}{\varepsilon}$, ou $a^{-B'} < \varepsilon$. L'inégalité $x < -B'$ entraîne l'inégalité $a^x < \varepsilon$.

Pour $0 < a < 1$, les conclusions sont renversées : car soit $a = \frac{1}{a'}$, d'où $a^x = \frac{1}{a'^x}$. *x augmentant indéfiniment par valeurs positives*, a'^x augmente indéfiniment et *a^x tend vers 0 ; x augmentant indéfiniment par valeurs négatives*, a'^x tend vers 0 et *a^x augmente indéfiniment*.

En résumé, x croissant de $-\infty$ à $+\infty$, a^x croît de 0 à $+\infty$ si a est > 1 ; tandis que, si a est < 1, a_x décroît de $+\infty$ à 0.

Voici la ligne représentant la marche de la fonction :



II. — ÉTUDE DE LA FONCTION LOGARITHMIQUE

181. Soit a un nombre positif différent de l'unité. Il résulte de l'étude faite précédemment que, y croissant d'une manière continue de $-\infty$ à $+\infty$, le nombre a^y prend une fois et une seule n'importe quelle valeur positive. Ainsi, quel que soit le nombre positif x, l'équation

$$(1) \qquad a^y = x,$$

dans laquelle y est l'inconnue, admet une racine et une seule. Cette équation fait donc correspondre à chaque nombre positif x un autre nombre y; autrement dit, elle définit une fonction y de x dans l'intervalle $(+\varepsilon, +\infty)$. Cette fonction se nomme *la fonction logarithmique*, ou, d'une façon plus précise, *le logarithme de x dans le système dont la base est a*, et l'on écrit :

$$(2) \qquad y = \log_a x.$$

Ainsi, par définition, les équations (1) et (2) sont équivalentes, et l'on a, quel que soit le nombre positif x,

$$a^{\log_a x} = x.$$

Il faut bien observer que $\log_a x$ *n'a aucun sens si* x est < 0.

D'après cette définition, on a, quel que soit a,

$$\log_a a = 1, \qquad \log_a 1 = 0.$$

Voici maintenant d'autres propriétés de la fonction logarithmique que l'on déduit immédiatement de celles de la fonction exponentielle :

1° *Le logarithme d'un produit de plusieurs facteurs positifs est égal à la somme des logarithmes de ces facteurs.*

En effet, soit $x, x', x'', \ldots$ des nombres positifs quelconques. On a

$$a^{\log_a x} = x, \qquad a^{\log_a x'} = x', \qquad a^{\log_a x''} = x'', \qquad \ldots,$$

d'où

$$a^{\log_a x + \log_a x' + \log_a x'' + \cdots} = xx'x'' \ldots,$$

et cette égalité montre que

$$\log_a(xx'x''\ldots) = \log_a x + \log_a x' + \log_a x'' + \cdots.$$

En particulier, x étant un nombre positif quelconque et m un entier positif, on a

$$\log_a x^m = m \log_a x.$$

De ce théorème résultent les conséquences suivantes :

Le logarithme du quotient de deux nombres positifs est égal à l'excès du logarithme du dividende sur le logarithme du diviseur.

Car soit $q = \frac{x}{x'}$ le quotient considéré. On a

$$x = x'q,$$

et par suite

$$\log_a x = \log_a x' + \log_a q.$$

Donc on a

$$\log_a q = \log_a x - \log_a x'.$$

m étant un nombre entier positif, le logarithme de la racine $m^{\text{ième}}$ d'un nombre positif x est égal au quotient par m du logarithme de ce nombre.

Car soit $r = \sqrt[m]{x}$ la racine considérée. On a

$$x = r^m,$$

et par suite

$$\log_a x = m \log_a r.$$

Donc on a

$$\log_a r = \frac{1}{m} \log_a x.$$

Ce théorème et ses conséquences font comprendre l'utilité des logarithmes au point de vue du calcul. Imaginons que l'on ait construit des tables permettant de trouver, d'une part, les logarithmes de tous les nombres positifs, d'autre part, le nombre positif admettant pour logarithme un nombre donné, quel qu'il soit. Dès lors, pour calculer un produit $p = xx'x''\ldots$, on pourra procéder comme il suit : chercher dans la table les logarithmes des nombres x, x', x'', ..., les additionner, enfin chercher dans la table le nombre ayant pour logarithme la somme obtenue. Ce dernier nombre sera le produit cherché. On rem-

place ainsi une multiplication par une addition. On remplacera de même une division par une soustraction, une élévation à la puissance m (m étant entier et positif) par une multiplication par m, une extraction de racine $m^{ième}$ par une division par m.

2° *x étant un nombre positif et x' un nombre quelconque*, on a

$$\log_a x^{x'} = x' \log_a x.$$

En effet, on a

$$x = a^{\log_a x},$$

et par suite

$$x^{x'} = (a^{\log_a x})^{x'} = a^{x' \log_a x}.$$

Donc on a

$$\log_a x^{x'} = x' \log_a x.$$

3° *Enfin, x et x' étant deux nombres positifs quelconques, la différence* $\log_a x - \log_a x'$ *a le signe de* $x - x'$ *ou le signe de* $x' - x$, *suivant que la base a est supérieure ou inférieure à* 1.

Car on a $x = a^{\log_a x}$, $x' = a^{\log_a x'}$, et il a été démontré que les deux différences $x - x'$, $\log_a x - \log_a x'$ ont le même signe ou des signes contraires, suivant que a est plus grand ou plus petit que 1. On peut encore énoncer cette proposition en disant que la fonction $\log_a x$ est *croissante* dans l'intervalle $(+\varepsilon, +\infty)$, si a est > 1; *décroissante* dans le même intervalle, si l'on a $0 < a < 1$; et on en conclut, en particulier, que $\log_a x$ a le signe de $x - 1$ ou de $1 - x$, suivant que l'on a $a > 1$ ou $0 < a < 1$.

182. *La fonction* $\log_a x$ *est continue pour toute valeur positive de* x.

Pour fixer les idées, nous supposerons $a > 1$. Soit x_0 un nombre positif quelconque, et soit

$$y_0 = \log_a x_0, \qquad \text{d'où} \qquad x_0 = a^{y_0}.$$

Désignons par η un nombre positif quelconque, et posons

$$a^{y_0 - \eta} = x_0 - \alpha, \qquad a^{y_0 + \eta} = x_0 + \beta;$$

α et β sont positifs, et l'on a

$$\log_a(x_0 - \alpha) = y_0 - \eta, \qquad \log_a(x_0 + \beta) = y_0 + \eta.$$

La fonction $\log_a x$ étant croissante dans l'intervalle $(+\varepsilon, +\infty)$, les inégalités

$$x_0 - \alpha < x < x_0 + \beta,$$

entraînent les inégalités

$$\log_a(x_0 - \alpha) < \log_a x < \log_a(x_0 + \beta),$$

ou

$$y_0 - \eta < \log_a x < y_0 + \eta;$$

de sorte que, si γ est le plus petit des deux nombres positifs α, β, l'inégalité

$$|\, x - x_0 \,| < \gamma$$

entraîne l'inégalité

$$|\, \log_a x - \log_a x_0 \,| < \eta.$$

C'est dire que la fonction $\log_a x$ est continue pour $x = x_0$.

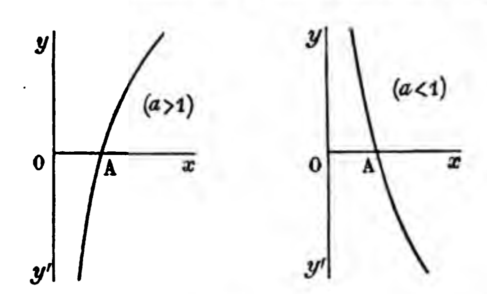
183. Que devient la fonction $y = \log_a x$, d'abord lorsque x tend vers zéro (par valeurs positives), ensuite lorsque x augmente indéfiniment ? *x tendant vers zéro, y augmente indéfiniment, par valeurs négatives si a est > 1, par valeurs positives si a est compris entre* 0 *et* 1. Car soit A un nombre positif quelconque. Si a est plus grand que 1, l'inégalité $\log_a x < -A$ est une conséquence de l'inégalité $0 < x < a^{-A}$; si a est compris entre 0 et 1, l'inégalité $\log_a x > A$ est une conséquence de l'inégalité $0 < x < a^{A}$; on voit donc bien que, x tendant vers zéro par valeurs positives, $\log_a x$ augmente indéfiniment, par valeurs négatives dans le premier cas, par valeurs positives dans le second.

x augmentant indéfiniment (par valeurs positives), *y augmente indéfiniment, par valeurs positives si a est > 1, par valeurs négatives si a est compris entre* 0 *et* 1. Car soit A un nombre positif quelconque. Si a est plus grand que 1, l'inégalité $\log_a x > A$ est une conséquence de $x > a^{A}$; si a est compris entre 0 et 1, l'inégalité $\log_a x < -A$ est une conséquence de $x > a^{-A}$; on voit donc bien que, x augmentant indéfiniment,

y augmente indéfiniment, par valeurs positives dans le premier cas, par valeurs négatives dans le second.

En résumé, lorsque x croît de 0 à $+\infty$, la fonction $\log_a x$ croît de $-\infty$ à $+\infty$ si a est supérieur à 1, et décroît de $+\infty$ à $-\infty$ si a est compris entre 0 et 1.

Voici la ligne représentant la marche de la fonction $y = \log_a x$:



On remarquera que cette ligne est la même que celle qui représente la marche de la fonction $y = a^x$; il suffit, pour s'en convaincre, de regarder $y'y$ comme axe des abscisses et $0x$ comme axe des ordonnées. Cette remarque sera généralisée plus loin.

184. Des différents systèmes de logarithmes. — Un système de logarithmes est déterminé dès que l'on connait sa base a; ce nombre a est uniquement assujetti à être positif et différent de 1 : il y a donc une infinité de systèmes de logarithmes.

Considérons deux systèmes de logarithmes déterminés par leurs bases a et a'. Nous allons montrer que *le rapport des logarithmes d'un même nombre x pris dans ces deux systèmes a une valeur indépendante de x.*

On a, en effet,

$$a^{\log_a x} = x, \qquad a'^{\log_{a'} x} = x,$$

et par suite

$$a^{\log_a x} = a'^{\log_{a'} x}, \qquad \text{ou} \qquad a^{\frac{\log_a x}{\log_{a'} x}} = a',$$

d'où l'on conclut que le rapport $\dfrac{\log_a x}{\log_{a'} x}$ a bien une valeur indépendante de x.

Il suit de là que, *pour passer du système de logarithmes dont la base est a', à celui dont la base est a, il suffit de multiplier les logarithmes pris dans le premier système par un même nombre* égal à la valeur constante de $\frac{\log_a x}{\log_{a'} x}$. En faisant $x = a$, on voit que ce nombre est égal à $\frac{1}{\log_{a'} a}$; en faisant $x = a'$, on voit qu'il est égal à $\log_a a'$.

Signalons en passant la relation

$$\log_a a' \times \log_{a'} a = 1,$$

qui résulte de ce qui précède, et qu'il serait, du reste, facile d'établir directement.

Logarithmes décimaux. — Le système de logarithmes usité dans la pratique est celui dont la base est 10; le logarithme d'un nombre x dans ce système se désigne simplement par $\log x$; on l'appelle le logarithme *décimal* ou *vulgaire* de ce nombre. Les logarithmes décimaux des nombres 1, 10, 100, 1000, ... sont 0, 1, 2, 3, ... ; les logarithmes décimaux des nombres 0,1; 0,01; 0,001; ... sont -1, -2, -3, ... En résumé, n étant un entier positif ou négatif, on a

$$\log 10^n = n.$$

Ces nombres 10^n sont les seuls nombres *rationnels* ayant des logarithmes décimaux rationnels. Car soit N un nombre rationnel et $\log N = \frac{p}{q}$, p et q étant entiers et q pouvant être supposé positif. Il s'agit de faire voir que N est de la forme 10^n, n étant un entier positif ou négatif. On a, par hypothèse, $N = 10^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{10^p}$. Supposons d'abord $p > 0$; alors 10^p est un nombre entier; ce nombre étant une puissance $q^{\text{ième}}$ exacte, les exposants de ses facteurs premiers sont tous des multiples de q. Or on a $10^p = 2^p \times 5^p$. On a donc $p = qn$, n étant un entier positif, et par suite $N = 10^n$. Supposons maintenant $p < 0$, et soit $p = -p'$; alors on a $N = \sqrt[q]{\frac{1}{10^{p'}}}$, d'où $\frac{1}{N} = \sqrt[q]{10^{p'}}$. N étant rationnel, $\frac{1}{N}$ l'est aussi; l'égalité

précédente implique donc que p' soit un multiple de q: on a donc $p' = qn'$ ou $p = -qn'$, n' étant un entier positif, et, par suite, $N = 10^{-n'}$.

REMARQUE. — Il est bon d'observer qu'il y a des nombres irrationnels dont les logarithmes décimaux sont rationnels. Tel est, par exemple, le nombre irrationnel $\sqrt{10}$ ou $10^{\frac{1}{2}}$, dont le logarithme décimal est $\frac{1}{2}$. D'une manière générale, tout nombre fractionnaire est le logarithme décimal d'un nombre irrationnel.

Fonctions inverses.

185. Le raisonnement que nous avons fait pour *définir* la fonction logarithmique, pour étudier *le sens de sa variation*, enfin pour démontrer *sa continuité*, peut se généraliser ainsi.

Soit $f(x)$ une fonction définie dans un intervalle (a, b), variant constamment dans le même sens (nous la supposerons croissante pour fixer les idées), enfin continue dans cet intervalle. Soit $f(a) = a'$, $f(b) = b'$. Il suit de ces hypothèses que, y croissant d'une manière continue de a à b, $f(y)$ prend une fois et une seule n'importe quelle valeur appartenant à l'intervalle (a', b'). x étant un nombre quelconque appartenant à l'intervalle (a', b'), l'équation

$$(1) \qquad f(y) = x,$$

dans laquelle y est l'inconnue, admet donc une solution et une seule appartenant à l'intervalle (a, b). Cette équation permet donc de faire correspondre à chaque valeur x appartenant à l'intervalle (a', b') un nombre y bien déterminé ; autrement dit, elle définit une fonction y de x dans l'intervalle (a', b'). Soit $\varphi(x)$ cette fonction. On la nomme *la fonction inverse de la fonction* $f(x)$. D'après cela, la fonction logarithmique est fonction inverse de la fonction exponentielle.

Soit c' un nombre tel qu'on ait

$$a' \leqslant c' \leqslant b' ;$$

si l'on pose

$$\varphi(c') = c,$$

on a

$$a \leqslant c \leqslant b,$$

et

$$f(c) = c'.$$

On a en particulier

$$\varphi(a') = a, \qquad \varphi(b') = b.$$

Nous avons supposé la fonction $f(x)$ croissante dans l'intervalle (a, b). Nous allons montrer que *la fonction* $y = \varphi(x)$ *est croissante dans l'intervalle* (a', b'). Car soit x', x'' deux valeurs quelconques de x appartenant à l'intervalle (a', b'), et posons

$$y' = \varphi(x'), \qquad y'' = \varphi(x'').$$

Les nombres y', y'' appartiennent à l'intervalle (a, b), et l'on a

$$x' = f(y'), \qquad x'' = f(y'').$$

Or, par hypothèse, la différence $x' - x'' = f(y') - f(y'')$ a le même signe que la différence $y' - y''$; c'est dire que la fonction $\varphi(x)$ est croissante dans l'intervalle (a', b').

Démontrons maintenant que *la fonction* $y = \varphi(x)$ *est continue dans l'intervalle* (a', b'). Soit d'abord x_0 une valeur quelconque *comprise* entre a' et b'. Posons $y_0 = \varphi(x_0)$; y_0 est *compris* entre a et b, et l'on a $x_0 = f(y_0)$. Soit ε un nombre positif quelconque, assez petit cependant pour que $y_0 - \varepsilon$ et $y_0 + \varepsilon$ appartiennent à l'intervalle (a, b). On a

$$f(y_0 - \varepsilon) < f(y_0) < f(y_0 + \varepsilon),$$

de sorte que si l'on pose

$$f(y_0 - \varepsilon) = x_0 - \alpha, \qquad f(y_0 + \varepsilon) = x_0 + \beta,$$

α et β sont positifs ; de plus, on a

$$\varphi(x_0 - \alpha) = y_0 - \varepsilon, \qquad \varphi(x_0 + \beta) = y_0 + \varepsilon.$$

La fonction $\varphi(x)$ étant croissante dans l'intervalle (a', b'), les inégalités

$$x_0 - \alpha < x < x_0 + \beta$$

entraînent les inégalités

$$\varphi(x_0 - \alpha) < \varphi(x) < \varphi(x_0 + \beta),$$

ou

$$y_0 - \varepsilon < \varphi(x) < y_0 + \varepsilon.$$

Soit η le plus petit des deux nombres positifs α, β ; l'inégalité

$$| x - x_0 | < \eta$$

entraîne l'inégalité

$$| \varphi(x) - \varphi(x_0) | < \varepsilon.$$

C'est dire que la fonction $\varphi(x)$ est continue pour $x = x_0$.

Démontrons maintenant qu'elle est continue à droite pour $x = a'$. Soit ε un nombre positif quelconque, assez petit cependant pour que $a + \varepsilon$ appartienne à l'intervalle (a, b). On a

$$f(a) < f(a + \varepsilon),$$

de sorte que si l'on pose

$$f(a + \varepsilon) = a' + \varepsilon',$$

ε' est positif ; de plus, on a

$$\varphi(a' + \varepsilon') = a + \varepsilon.$$

La fonction $\varphi(x)$ étant croissante dans l'intervalle (a', b'), les inégalités

$$a' < x < a' + \varepsilon'$$

entraînent les inégalités

$$\varphi(a') < \varphi(x) < \varphi(a' + \varepsilon'),$$

ou

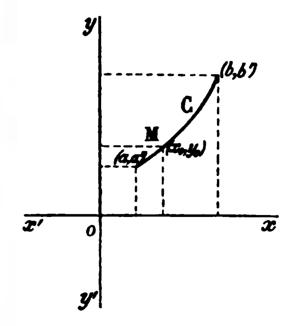
$$a < \varphi(x) < a + \varepsilon :$$

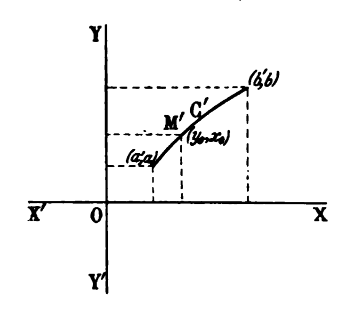
c'est dire que $\varphi(x)$ est continue à droite pour $x = a'$. On démontrerait de même qu'elle est continue à gauche pour $x = b'$. Elle est donc continue dans l'intervalle (a', b').

On raisonne d'une manière analogue lorsque la fonction $f(x)$ est décroissante dans l'intervalle (a, b). Dans ce cas, la fonction inverse $\varphi(x)$ est décroissante dans l'intervalle (b', a').

Enfin il est facile de se rendre compte que les deux lignes C, C', représentant l'une la variation de $f(x)$, l'autre la variation de $\varphi(x)$, sont égales. Soit M un point quelconque de la ligne C soit x_0 son abscisse et y_0 son ordonnée, de sorte que l'on $y_0 = f(x_0)$. Par cela même on a $x_0 = \varphi(y_0)$, de sorte que l ligne C' passe par le point M' d'abscisse y_0 et d'ordonnée x_0 Si donc on porte le plan de la ligne C sur celui de la ligne (

de manière à faire coïncider les origines des coordonnées, à placer ox sur OY et oy sur OX, le point M de la ligne C viendra se placer sur le point M′ de la ligne C′. La ligne C tout





entière viendra se placer sur la ligne C′. D'après cela, la ligne C qui représente la variation de $f(x)$ peut être considérée aussi comme représentant la variation de la fonction inverse $\varphi(x)$: il suffit de prendre l'axe des y pour axe des abscisses et l'axe des x pour axe des ordonnées.

Fonctions de fonction.

186. Soit $u = \varphi(x)$ une fonction de la variable indépendante x définie dans un intervalle (a, b). Supposons que toutes les valeurs prises par cette fonction u quand x croît de a à b appartiennent à l'intervalle (a', b'). Soit maintenant $y = f(u)$ une fonction de la variable indépendante u définie dans l'intervalle (a', b'). Si x_0 est un nombre quelconque appartenant à l'intervalle (a, b), le nombre $u_0 = \varphi(x_0)$ appartient à l'intervalle (a', b') ; posons $f(u_0) = y_0$. En faisant correspondre à la valeur x_0 de la variable indépendante x le nombre y_0, on définit une fonction y de x dans l'intervalle (a, b). Une telle fonction porte le nom de *fonction de fonction* ; on la représente par la notation

$$y = f[\varphi(x)] = F(x).$$

187. Le théorème suivant est vrai, que la fonction $\varphi(x)$ soit continue à droite ou à gauche pour $x = x_0$. C'est pourquoi, dans l'énoncé de ce théorème, nous dirons simplement de cette fonction qu'elle est continue pour $x = x_0$.

Théorème. — *Supposons la fonction $f(u)$ de la variable indépendante u continue dans l'intervalle (a', b'). Si la fonction $\varphi(x)$ est continue pour $x = x_0$, x_0 appartenant à l'intervalle (a, b), la fonction $F(x)$ est également continue pour $x = x_0$.*

Pour fixer les idées, nous supposerons $\varphi(x)$ continue à droite, et nous démontrerons que $F(x)$ est également continue à droite. Soit ε un nombre positif quelconque. Nous allons montrer que, pour des valeurs de x suffisamment voisines de x_0 (mais un peu plus grandes), on a

$$| F(x) - F(x_0) | < \varepsilon.$$

Pour cela, posons $\varphi(x_0) = u_0$, de sorte que l'on a $f(u_0) = F(x_0)$. Par hypothèse, on a

$$a' \leqslant u_0 \leqslant b'.$$

Supposons d'abord u_0 différent de a' et de b'. Alors la fonction $f(u)$ est continue pour $u = u_0$; il existe donc un nombre positif η tel que l'inégalité

$$| u - u_0 | < \eta$$

entraine l'inégalité

$$| f(u) - f(u_0) | < \varepsilon.$$

D'après cela, si l'on a

(1) $$| \varphi(x) - \varphi(x_0) | < \eta,$$

on aura

(2) $$| F(x) - F(x_0) | < \varepsilon.$$

Maintenant, la fonction $\varphi(x)$ étant continue à droite pour $x = x_0$, il existe un nombre positif α tel que la double inégalité

(3) $$0 \leqslant x - x_0 < \alpha$$

entraine l'inégalité (1). Dès lors, la double inégalité (3) entrair l'inégalité (2) : $F(x)$ est donc continue à droite pour $x = x_0$

Supposons à présent que u_0 soit égal à a' ou à b', soit pai

exemple $u_0 = b'$. Alors $f(u)$ est continue à gauche pour $u = u_0$; il existe donc un nombre positif η tel que la double inégalité

$$0 \leqslant b' - u < \eta$$

entraine l'inégalité

$$| f(u) - f(u_0) | < \varepsilon;$$

et comme la valeur de $u = \varphi(x)$ ne peut pas devenir supérieure à b', on voit que si l'on a

$$b' - \varphi(x) < \eta,$$

on aura

$$| F(x) - F(x_0) | < \varepsilon.$$

Or, la fonction $\varphi(x)$ étant continue à droite pour $x = x_0$, il existe un nombre positif α tel que la double inégalité

$$0 \leqslant x - x_0 < \alpha$$

entraine la première des deux inégalités précédentes et par suite aussi la seconde.

Corollaire. — La fonction $f(u)$ étant toujours supposée continue dans l'intervalle (a', b'), si la fonction $\varphi(x)$ est continue dans un intervalle (α, β) faisant partie de l'intervalle (a, b), la fonction $F(x)$ est également continue dans l'intervalle (α, β).

REMARQUE. — Les conclusions précédentes subsistent lorsque la fonction $f(u)$ n'est définie et continue que dans l'intervalle $(a' + \varepsilon, b')$ ou dans l'intervalle $(a', b' - \varepsilon)$ ou dans l'intervalle $(a' + \varepsilon, b' - \varepsilon)$, à condition que les valeurs de la fonction $\varphi(x)$ soient toutes supérieures à a' dans le premier cas, toutes inférieures à b' dans le second, toutes comprises entre a' et b' dans le troisième.

Autre énoncé du théorème précédent. — *Supposons la fonction $f(u)$ de la variable indépendante u continue dans l'intervalle (a', b'). Si, x tendant vers x_0 par valeurs appartenant à l'intervalle (a, b), $\varphi(x)$ tend vers l, $f[\varphi(x)]$ tend vers $f(l)$.*

Nous supposerons, pour fixer les idées, que x tende vers x_0 par valeurs plus grandes que x_0 $(x_0 < b)$. Le nombre l appartient à l'intervalle (a', b'), sans quoi, pour des valeurs de

x suffisamment voisines de x_0, les valeurs de $\varphi(x)$ n'appartiendraient pas à cet intervalle, ce qui est contraire à l'hypothèse. Considérons une fonction $\psi(x)$ qui soit égale à $\varphi(x)$ pour toute valeur de x autre que x_0 appartenant à l'intervalle (a, b) et à l pour $x = x_0$; alors $f(l)$ sera la valeur de $f[\psi(x)]$ pour $x = x_0$. D'après le choix de $\psi(x_0)$, $\psi(x)$ est continue à droite pour $x = x_0$; donc $f[\psi(x)]$ est continue à droite pour $x = x_0$, et $f[\psi(x)]$ tend vers $f(l)$, quand x tend vers x_0 par valeurs plus grandes que x_0. Comme $f[\psi(x)]$ est égale à $f[\varphi(x)]$ pour toute valeur de x autre que x_0 appartenant à l'intervalle (a, b), la proposition est démontrée.

Exemples.

188. Fonction a^u. — Soit a un nombre positif et différent de 1, et soit u une fonction de x définie dans l'intervalle (α, β). Si l'on pose

$$y = a^u,$$

y est une fonction de x définie dans le même intervalle. Soit x_0 un nombre appartenant à l'intervalle (α, β). Si la fonction u est continue pour $x = x_0$, il en est de même de la fonction y. Si la fonction u est continue dans un intervalle (α', β') faisant partie de l'intervalle (α, β), la fonction y est également continue dans cet intervalle. On peut dire encore que si, x tendant vers x_0, u tend vers une limite l, par cela même a^u tend vers une limite égale à a^l.

Remarque. — Si, x tendant vers x_0, u augmente indéfiniment, on ne peut rien dire de général, sauf si u augmente indéfiniment par valeurs > 0 ou par valeurs < 0. Alors, si a est > 1, a^u augmente indéfiniment ou tend vers 0, selon que u augmente par valeurs > 0 ou par valeurs < 0. Le contraire a lieu si a est < 1.

Fonction $\log_a u$. — Soit a un nombre positif et différent de 1, et soit u une fonction de x définie dans un intervalle (α, β) et *restant positive dans cet intervalle*. Si l'on pose

$$y = \log_a u,$$

y est une fonction de x définie dans le même intervalle. Si, pour une valeur x_0 de x appartenant à cet intervalle, la fonction u est continue, il en est de même de la fonction y. Si la fonction u est continue dans un intervalle (α', β') faisant partie de l'intervalle (α, β), la fonction y est également continue dans cet intervalle. On peut dire encore que si, x tendant vers x_0, u tend vers une limite *positive* l, $\log_a u$ tend vers une limite égale à $\log_a l$.

Remarque. — Si, x tendant vers x_0, u tend vers 0, $\log_a u$ augmente indéfiniment par valeurs négatives ou par valeurs positives, suivant que a est > 1 ou < 1 ; si, x tendant vers x_0, u augmente indéfiniment, $\log_a u$ augmente indéfiniment par valeurs positives ou par valeurs négatives selon que a est > 1 ou < 1.

Fonction u^v. — Soit u et v deux fonctions de x définies dans l'intervalle (α, β) ; supposons que la fonction u reste *positive* dans cet intervalle. A chaque valeur de x appartenant à l'intervalle (α, β) correspond un nombre $u^v = y$ bien déterminé, de sorte que y peut être considérée comme une fonction de x définie dans l'intervalle (α, β). On ramène l'étude de y à celle d'une fonction de fonction en écrivant

$$y = a^w, \qquad \text{avec} \qquad w = v \log_a u,$$

a étant un nombre positif et différent de 1 arbitrairement choisi (nous le supposerons plus grand que 1, pour fixer les idées). Si les deux fonctions u et v sont continues pour $x = x_0$, il en est de même de $\log_a u$, de $w = v \log_a u$, et par suite de $y = a^w$. Et si les deux fonctions u et v sont continues dans un intervalle (α', β') faisant partie de l'intervalle (α, β), la fonction $y = u^v$ est également continue dans cet intervalle. On peut dire aussi que si, x tendant vers x_0, u tend vers une limite *positive* l et v vers une limite m, u^v tend vers une limite égale à l^m.

Remarques. — 1° Si, x tendant vers x_0, u tend vers une limite $l \neq 1$, et si v augmente indéfiniment, les conclusions sont les mêmes que pour la fonction l^v.

2° Si, x tendant vers x_0, u augmente indéfiniment, ou tend vers 0, pendant que v tend vers une limite $\neq 0$, $v \log_a u$ augmente indéfiniment, et y tend vers 0 ou augmente indéfiniment.

3° Toutes les fois que l'un des facteurs du produit $v \log_a u$ tend vers 0, tandis que l'autre augmente indéfiniment, on ne peut rien dire de général sur ce que devient la fonction u^v. Cette circonstance se présente lorsque v augmente indéfiniment, pendant que u tend vers 1, ou lorsque v tend vers 0, pendant que u tend vers 0 ou augmente indéfiniment. Si, par un moyen quelconque, on découvre que $v \log_a u$ tend vers une limite l, u^v tend vers a^l.

Exemples : La fonction

$$y = x^m,$$

m étant une constante positive ou négative, rationnelle ou irrationnelle, est définie et continue dans l'intervalle $(+\varepsilon, +\infty)$.

La fonction

$$y = x^x$$

est définie et continue dans le même intervalle.

Enfin, la fonction

$$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

est définie et continue dans tout intervalle où $1 + \frac{1}{x}$ reste positive. Or l'inéquation

$$1 + \frac{1}{x} > 0 \qquad \text{ou} \qquad x(x+1) > 0$$

est vérifiée par les valeurs de x inférieures à -1 et par les valeurs de x supérieures à 0. La fonction $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ est donc définie et continue dans les deux intervalles $(-\infty, -1-\varepsilon)$, $(+\varepsilon, +\infty)$. Ces deux dernières fonctions seront étudiées dans le chapitre VI.

L'étude de la fonction

$$y = x^m$$

se ramène facilement à celle des fonctions exponentielle et loga-

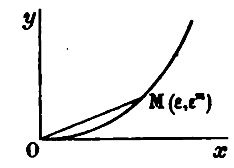
rithmique. Car on a

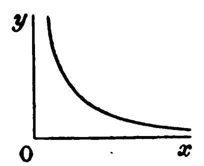
$$y = a^w, \qquad \text{avec} \qquad w = m \log_a x, \qquad a > 1.$$

x croissant de $+\varepsilon$ à $+\infty$, $\log_a x$ croît ; w croît ou décroît, suivant que m est positif ou négatif. Ainsi la fonction y est croissante pour $m > 0$, décroissante pour $m < 0$. x tendant vers 0, $\log_a x$ augmente indéfiniment par valeurs négatives ; si m est positif, w augmente indéfiniment par valeurs négatives et y tend vers 0 ; si m est négatif, w augmente indéfiniment par valeurs positives et il en est de même de y. On voit pareillement que, x augmentant indéfiniment par valeurs positives, y augmente indéfiniment par valeurs positives si m est positif, et tend vers 0 si m est négatif.

En résumé, quand x croît de 0 à $+\infty$, x^m croît de 0 à $+\infty$ si m est positif ; tandis que, si m est négatif, x^m décroît de $+\infty$ à 0.

Voici la ligne représentant la marche de la fonction $y = x^m$. La première figure correspond à l'hypothèse $m > 0$ [1], la seconde à l'hypothèse $m < 0$.





La fonction x^m jouit de la propriété suivante : x et x' étant deux nombres positifs quelconques, on a

$$x^m \times x'^m = (xx')^m.$$

Car on a

$$x^m = a^{m \log_a x}, \quad x'^m = a^{m \log_a x'},$$

(1) Dans l'hypothèse $m > 0$, on peut se proposer d'avoir la tangente à l'origine. Remarquons pour cela que la sécante OM a pour équation $y = \frac{\varepsilon^m}{\varepsilon} x = \varepsilon^{m-1} x$. Pour $m > 1$, cette sécante tend vers Ox ; pour $m < 1$, elle tend vers Oy.

d'où

$$x^m \times x'^m = a^{m(\log_a x + \log_a x')} = a^{m \log_a xx'},$$

et par suite

$$x^m \times x'^m = (xx')^m.$$

On conclut de là l'égalité

$$\frac{x^m}{x'^m} = \left(\frac{x}{x'}\right)^m.$$

Terminons par une remarque relative à la fonction x^m, quand m est *rationnel*. Si m est entier et positif, la fonction x^m est entière. Si m est entier et négatif, et si l'on convient que x^m représente $\frac{1}{x^{-m}}$, alors même que x est négatif, la fonction x^m est rationnelle et définie dans les deux intervalles $(-\infty, -\varepsilon)$, $(+\varepsilon, +\infty)$. Supposons m fractionnaire et égal à $\frac{p}{q}$, p et q étant premiers entre eux et q pouvant être supposé positif. Si q est impair et si l'on convient que $x^{\frac{p}{q}}$ représente $\sqrt[q]{x^p}$, la fonction x^m est définie dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ si p est positif, et dans les intervalles $(-\infty, -\varepsilon)$, $(+\varepsilon, +\infty)$ si p est négatif; elle est paire ou impaire, suivant que p est pair ou impair. Enfin, si q est pair, p est impair, et $x^{\frac{p}{q}}$ n'a aucun sens pour x négatif.

189. On peut généraliser la notion de fonction de fonction. Soit $u = \psi(x)$ une fonction de x définie dans l'intervalle (a, b), et dont toutes les valeurs, x croissant de a à b, appartiennent à l'intervalle (a', b'). Soit $v = \varphi(u)$ une fonction de u définie dans l'intervalle (a', b'), et dont toutes les valeurs, u croissant de a' à b', appartiennent à l'intervalle (a'', b''). Soit enfin $y = f(v)$ une fonction de v définie dans l'intervalle (a'', b''). x_0 étant un nombre quelconque appartenant à l'intervalle (a, b), le nombre $u_0 = \psi(x_0)$ appartiendra à l'intervalle (a', b'), et le nombre $v_0 = \varphi(u_0)$ appartiendra à l'intervalle (a'', b''). Soit $f(v_0) = y_0$. En faisant correspondre à la valeur x_0 de x le nombre y_0, on définit une fonction y de x dans

l'intervalle (a, b) ; on la représente par la notation

$$y = f\{\varphi[\psi(x)]\} = F(x).$$

Supposons : 1° la fonction $\varphi(u)$ de u continue dans l'intervalle (a', b') ; 2° la fonction $f(v)$ de v continue dans l'intervalle (a'', b''). Soit x_0 une valeur appartenant à l'intervalle (a, b). Si la fonction $\psi(x)$ est continue pour $x = x_0$, *il en est de même de la fonction* $F(x)$. Car soit $\varphi[\psi(x)] = \Phi(x)$, d'où $f[\Phi(x)] = F(x)$. La fonction $\Phi(x)$, définie dans l'intervalle (a, b), est continue pour $x = x_0$, et il en est de même de $F(x)$. — Si la fonction $\psi(x)$ est continue dans un intervalle (α, β) faisant partie de l'intervalle (a, b), la fonction $F(x)$ est continue dans ce même intervalle.

Soit, par exemple, a et b deux nombres positifs différents de 1, et u une fonction de x définie dans l'intervalle (α, β). Si l'on pose

$$y = a^{b^u}, \qquad z = \log_a(1 + b^u),$$

y et z sont deux fonctions de x définies dans ce même intervalle. Si la fonction u est continue pour une valeur x_0 appartenant à l'intervalle (α, β), il en est de même de y et de z. Et si la fonction u est continue dans un intervalle (α', β') faisant partie de l'intervalle (α, β), les fonctions y et z sont continues dans ce même intervalle.

USAGE DES TABLES DES LOGARITHMES DES NOMBRES

190. Dans tout ce qui va suivre, il ne sera question que de logarithmes décimaux. Nous supposons décimaux et les nombres donnés et les valeurs approchées de leurs logarithmes.

Appelons N le nombre décimal donné. Supposons-le d'abord plus grand que 1 ; alors $\log N$ est positif. Soit n le nombre des chiffres de la partie entière de N. On a

$$10^{n-1} < N < 10^n,$$

d'où

$$n - 1 < \log N < n.$$

On prendra donc, comme valeur approchée de $\log N$, un nombre décimal dont la partie entière ou *caractéristique* est $n - 1$. On énonce ainsi ce résultat :

La caractéristique du logarithme d'un nombre décimal plus grand que 1 est égale au nombre diminué de 1 des chiffres de la partie entière de ce nombre. Par exemple, la caractéristique de $\log 4273{,}52$ est 3.

Supposons maintenant N plus petit que 1 ; alors $\log N$ est négatif. Soit n le numéro d'ordre du premier chiffre décimal de N autre que 0. On a

$$1 < N \times 10^n < 10,$$

d'où

$$0 < \log N + n < 1 ;$$

$\log N$ est donc de la forme $-n + f$, f étant un nombre compris entre 0 et 1, et, comme valeur approchée de $\log N$, on prendra un nombre qui sera une fraction décimale positive moindre que 1, plus un nombre entier négatif. On appelle encore ce nombre entier la caractéristique de $\log N$, et on a l'énoncé suivant :

La caractéristique (négative) *du logarithme d'un nombre décimal plus petit que 1 est égale en valeur absolue au numéro d'ordre du premier chiffre décimal autre que* 0. Par exemple, la caractéristique de $\log 0{,}0427352$ est -2.

Enfin, *si un nombre décimal d représente, avec une certaine erreur ε, le logarithme d'un nombre décimal N, on obtient, avec la même erreur ε, les logarithmes des nombres décimaux déduits de N par le simple déplacement de la virgule, en changeant, conformément aux deux règles précédentes, la caractéristique du nombre décimal d, sans toucher à la partie décimale.*

Soit

$$N = 4273{,}52, \qquad \text{et} \qquad d = 3 + f,$$

f étant un nombre décimal compris entre 0 et 1. On a

$$\log N = 3 + f + \varepsilon.$$

Le nombre $42{,}7352$ est égal à $\frac{N}{10^2}$; par suite on a

$$\log 42{,}7352 = \log N - 2 = 1 + f + \varepsilon.$$

De même, le nombre 0,0427352 est égal à $\frac{N}{10^5}$; par suite on a

$$\log 0{,}0427352 = \log N - 5 = -2 + f + \varepsilon.$$

191. Les tables dont nous allons expliquer l'usage sont celles de Dupuis. Elles donnent, de la page 4 inclusivement à la page 184 exclusivement, les logarithmes des nombres entiers compris entre 10 000 et 100 000, avec une erreur moindre que $\frac{1}{2 \times 10^7}$. Nous allons voir qu'elles permettent de calculer, avec une approximation connue, le logarithme d'un nombre décimal quelconque. Nous tirerons les exemples numériques de la page 49. (1)

Soit N le nombre décimal dont on cherche le logarithme. Supposons, ce qu'il est toujours permis de faire, que sa partie entière ait 5 chiffres, et soit

$$N = n + h,$$

n étant un entier au moins égal à 10000 et moindre que 100000, et h une fraction décimale positive ou nulle et moindre que 1. Dans le cas où h est égal à 0, nous avons dit que les tables fournissent immédiatement $\log N = \log n$. Les exemples suivants feront comprendre la manière dont il faut procéder.

Exemple I : $n = 32785$. On supprime le dernier chiffre 5, et on cherche, dans la colonne de gauche intitulée N, le nombre 3278. On parcourt, de gauche à droite, la ligne contenant ce nombre jusqu'à ce qu'on arrive dans la colonne intitulée 5 en haut et en bas. Le nombre 6752 qu'on y lit est le nombre formé par les quatre dernières décimales du logarithme cherché; les trois premières décimales sont dans la marge de la colonne intitulée 0, *au-dessus* de la ligne considérée ; elles forment le nombre 515. Ainsi on a

$$\log 32785 = 4{,}5156752 + \varepsilon, \qquad \text{avec} \qquad |\varepsilon| < \frac{1\ ^{(2)}}{2 \times 10^7}.$$

(1) Dans les tables de Schrön, c'est de la page 6 à la page 186 qu'il faut aller. Se reporter à la page 51.

(2) Dans les tables de Schrön, la dernière décimale, 2, est soulignée. Cela signifie que le nombre ε est négatif.

On a par suite

$$\log 32{,}785 = 1{,}5156752 + \varepsilon\,;$$
$$\log 0{,}032785 = 0{,}5156752 - 2 + \varepsilon,$$

ce qu'on écrit ainsi :

$$\log 0{,}032785 = \bar{2}{,}5156752 + \varepsilon.$$

Exemple II : $n = 32586$. Les quatre dernières décimales de $\log n$ forment le nombre 0311 ; l'astérisque placé à sa gauche sert à indiquer qu'il faut chercher le nombre formé par les trois premières décimales, non au-dessus, mais *au-dessous* de la ligne considérée : ce nombre est 513 et non pas 512. Ainsi

$$\log 32586 = 4{,}5130311 + \varepsilon, \quad \text{avec} \quad |\varepsilon| < \frac{1}{2 \times 10^7}\cdot$$

On a par suite

$$\log \;\; 32{,}586 = 1{,}5130311 + \varepsilon\,;$$
$$\log 0{,}032586 = \bar{2}{,}5130311 + \varepsilon.$$

192. Arrivons maintenant au cas général. Désignons par $4 + \dfrac{L}{10^7}$ et $4 + \dfrac{L + \Delta}{10^7}$ les valeurs approchées de $\log n$ et de $\log(n+1)$ données par les tables, de sorte que L et Δ sont deux entiers positifs. Δ *s'appelle la différence tabulaire relative à* n. Si, dans l'intervalle $(n,\ n+1)$, l'accroissement de $\log x$ était proportionnel à l'accroissement de x, on aurait

$$(1) \qquad \log(n+h) - \log n = h[\log(n+1) - \log n].$$

Si l'on remplace dans cette égalité $\log n$ et $\log(n+1)$ par les valeurs approchées fournies par les tables, on obtient l'égalité approchée

$$\log(n+h) = 4 + \frac{L + h\Delta}{10^7}\cdot$$

Mais $h\Delta$ n'est pas, en général, un nombre entier; soit δ l'entier le plus voisin du produit $h\Delta$. On adopte, comme valeur approchée de $\log(n+h)$, le nombre $4 + \dfrac{L + \delta}{10^7}\cdot$ Telle est la règle.

Cherchons à nous rendre compte de l'erreur commise. Elle

tient aux trois causes suivantes : 1° $4+\frac{L}{10^7}$ et $4+\frac{L+\Delta}{10^7}$ ne sont que des valeurs approchées de $\log n$ et de $\log(n+1)$; 2° δ n'est qu'une valeur approchée de $h\Delta$; 3° enfin l'égalité (1) n'est pas rigoureusement vraie. Les deux premières causes sont de beaucoup les plus importantes.

On a les égalités *rigoureuses*

$$\log n = 4+\frac{L+\varepsilon}{10^7}, \quad \log(n+1) = 4+\frac{L+\Delta+\varepsilon'}{10^7}, \quad h\Delta = \delta+\varepsilon'',$$

les trois nombres $|\varepsilon|$, $|\varepsilon'|$, $|\varepsilon''|$ étant moindres que $\frac{1}{2}$.

D'autre part, nous démontrerons [1] que, *sous les conditions* $n \geqslant 10000$ et $0<h<1$, que nous supposons remplies, *on a*

$$(2) \quad \log(n+h) - \log n = h[\log(n+1) - \log n] + \frac{\eta}{10^7},$$

le nombre η *étant moindre en valeur absolue que* $\frac{1}{40}$.

Si, dans cette égalité (2), nous remplaçons $\log n$ et $\log(n+1)$ par leurs valeurs exactes, il vient

$$\log(n+h) = 4+\frac{L+\varepsilon+h(\Delta+\varepsilon'-\varepsilon)+\eta}{10^7},$$

ou

$$\log(n+h) = 4+\frac{L+\delta}{10^7}+\frac{\varepsilon(1-h)+h\varepsilon'+\varepsilon''+\eta}{10^7}.$$

Le dernier terme du second membre de cette égalité représente l'erreur commise lorsqu'on prend $4+\frac{L+\delta}{10^7}$ comme valeur approchée de $\log(n+h)$. Cette erreur est au plus égale à

$$\frac{(1-h)|\varepsilon|+h|\varepsilon'|+|\varepsilon''|+|\eta|}{10^7}$$

et par suite est inférieure à

$$\frac{\frac{1}{2}(1-h+h+1)+\frac{1}{40}}{10^7} = \frac{1}{10^7}+\frac{1}{4\times 10^8}.$$

193. Il nous reste à montrer sur un exemple comment on

[1] Voir le numéro 269.

applique cette règle dans la pratique. Soit à calculer le logarithme du nombre 327,68942. Nous déplaçons d'abord la virgule de manière à amener la partie entière à avoir 5 chiffres; cela nous donne le nombre 32768,942. Ainsi nous avons

$$n = 32768; \qquad h = 0,942.$$

On trouve aisément

$$L = 5154499, \qquad \Delta = 133.$$

Il faut donc former le produit

$$133 \times 0,942.$$

Dans la colonne intitulée Diff. et p. p. (différences et parties proportionnelles) se trouvent plusieurs tableaux. Celui qui est intitulé 133 contient les produits de 133 par 0,1; 0,2; ...: 0,9. On a donc immédiatement

$$\begin{array}{rcr} 133 \times 0,9 & = & 119,7 \\ 133 \times 0,04 & = & 5,32 \\ 133 \times 0,002 & = & 0,266, \\ \hline \end{array}$$

d'où

$$133 \times 0,942 = 125,286$$

On a donc

$$\delta = 125, \qquad L + \delta = 5154499 + 125 = 5154624,$$

et l'on adopte comme valeur approchée de $\log 32768,942$ le nombre 4,5154624, et comme valeur approchée de $\log 327,68942$ le nombre 2,5154624. On a l'habitude de disposer ainsi les calculs :

$$\begin{array}{lll} \log 32768 & = 4,5154499 & (\Delta = 133) \\ \quad 0,9 & \ldots\ldots 1197 & \\ \quad 0,04 & \ldots\ldots\ldots 532 & \\ \quad 0,002 & \ldots\ldots\ldots 266 & \\ \hline & 4,5154624286 & \end{array}$$

$$\log 32768,942 = 4,5154624 + \alpha;$$

$$\log 327,68942 = 2,5154624 + \alpha, \qquad |\alpha| < \frac{1}{10^7} + \frac{1}{4 \times 1}$$

194. Occupons-nous maintenant du problème inverse : connaissant $\log N$, calculer N. Faisons d'abord la remarque suivante :

Si un nombre décimal N représente, avec une certaine erreur, le nombre ayant pour logarithme un nombre décimal donné L, on obtient, avec la même erreur relative, les nombres ayant des logarithmes déduits de L par le seul changement de la caractéristique en déplaçant dans N la virgule d'une manière convenable.

Soit, en effet, $N+\varepsilon$ le nombre exact ayant L pour logarithme, de sorte qu'on a

$$10^L = N+\varepsilon.$$

Tout nombre déduit de L par le seul changement de la caractéristique est de la forme $L+p$, p étant un entier positif ou négatif. Or on a

$$10^{L+p} = N\times 10^p + \varepsilon\times 10^p.$$

Si donc on prend $N\times 10^p$ comme valeur approchée du nombre ayant $L+p$ pour logarithme, on commet une erreur absolue égale à $\varepsilon\times 10^p$ et une erreur relative égale à $\frac{\varepsilon}{N+\varepsilon}$.

195. En général, on ne connaît pas exactement le logarithme du nombre cherché N. Quoi qu'il en soit, nous supposerons d'abord égale à 4 la caractéristique de ce logarithme. La valeur approchée de $\log N$ est donc de la forme $4+\frac{L'}{10^7}$, L' étant entier, positif et moindre que 10^7. Cherchons sur la table les deux logarithmes consécutifs comprenant le logarithme donné ; soit $4+\frac{L}{10^7}$ et $4+\frac{L+\Delta}{10^7}$ ces logarithmes, correspondant aux deux entiers consécutifs n et $n+1$. On a, par hypothèse,

$$L < L' < L+\Delta,$$

ou, en désignant par δ la différence $L'-L$,

$$0<\delta<\Delta.$$

Soit

$$N = n+h, \quad (0<h<1).$$

Si, dans l'égalité approchée

$$(1) \qquad \log(n+h) - \log n = h[\log(n+1) - \log n],$$

nous remplaçons $\log n$, $\log(n+1)$ et $\log(n+h)$ par leurs

valeurs approchées $4+\frac{L}{10^7}$, $4+\frac{L+\Delta}{10^7}$, $4+\frac{L+\delta}{10^7}$, il vient

$$\delta = h\Delta, \qquad \text{d'où} \qquad h = \frac{\delta}{\Delta}.$$

Mais $\frac{\delta}{\Delta}$ n'est qu'une valeur approchée de h : 1° parce que $4+\frac{L}{10^7}$, etc. ne sont que des valeurs approchées de $\log n$, etc.; 2° parce que l'égalité (1) n'est pas rigoureuse. Dans l'égalité rigoureuse

$$(2) \quad \log(n+h)-\log n = h[\log(n+1)-\log n]+\frac{\eta}{10^7}, \quad |\eta|<\frac{1}{40},$$

remplaçons

$$\log n, \qquad \log(n+1), \qquad \log(n+h)$$

par leurs valeurs *exactes*

$$4+\frac{L+\varepsilon}{10^7}, \quad |\varepsilon|<\frac{1}{2}; \quad 4+\frac{L+\Delta+\varepsilon'}{10^7}, \quad |\varepsilon'|<\frac{1}{2};$$

$$4+\frac{L+\delta+\alpha}{10^7};$$

il vient

$$\delta+\alpha-\varepsilon = h(\Delta+\varepsilon'-\varepsilon)+\eta,$$

d'où l'on tire

$$h = \frac{\delta+\alpha-\varepsilon-\eta}{\Delta+\varepsilon'-\varepsilon},$$

$$h-\frac{\delta}{\Delta} = \frac{\Delta(\alpha-\varepsilon)-\delta(\varepsilon'-\varepsilon)}{\Delta(\Delta+\varepsilon'-\varepsilon)}-\frac{\eta}{\Delta+\varepsilon'-\varepsilon},$$

et par suite

$$\left|h-\frac{\delta}{\Delta}\right| < \frac{\Delta|\alpha|+(\Delta-\delta)|\varepsilon|+\delta|\varepsilon'|}{\Delta(\Delta-1)}+\frac{|\eta|}{\Delta-1},$$

ou

$$\left|h-\frac{\delta}{\Delta}\right| < \frac{\Delta|\alpha|+\frac{1}{2}(\Delta-\delta+\delta)}{\Delta(\Delta-1)}+\frac{1}{40(\Delta-1)} = \frac{|\alpha|+\frac{1}{2}+\frac{1}{40}}{\Delta-1}.$$

Ainsi

$$\frac{|\alpha|+\frac{1}{2}+\frac{1}{40}}{\Delta-1}$$

est une limite supérieure de l'erreur commise en prenant $\frac{\delta}{\Delta}$ pour valeur approchée de h. Ce nombre dépasse certainement $\frac{1}{1000}$, car il dépasse $\frac{1}{2(\Delta-1)}$, et l'inégalité

$$\frac{1}{2(\Delta-1)} > \frac{1}{1000} \qquad \text{ou} \qquad \Delta < 501$$

est réalisée d'un bout à l'autre des tables, la plus grande valeur de Δ étant 435.

Maintenant la fraction $\frac{\delta}{\Delta}$ n'est pas, en général, réductible en décimales; il est inutile, d'après ce qui précède, de la calculer à $\frac{1}{1000}$ près; on se contentera de chercher la fraction $\frac{p}{100}$ (p étant entier et positif) qui est la plus voisine de $\frac{\delta}{\Delta}$:

$$\frac{\delta}{\Delta} = \frac{p}{100} + f, \qquad |f| < \frac{1}{200}.$$

En prenant $n + \frac{p}{100}$ pour valeur approchée de N, on commet une erreur moindre que

$$\frac{|\alpha| + \frac{1}{2} + \frac{1}{40}}{\Delta - 1} + \frac{1}{200}.$$

Dans le cas particulier où $\log N$ est connu exactement, l'erreur commise est certainement moindre que $\frac{2}{100}$, car elle est moindre que $\frac{21}{40(\Delta-1)} + \frac{1}{200}$, et l'inégalité

$$\frac{21}{40(\Delta-1)} + \frac{1}{200} < \frac{2}{100}, \qquad \text{ou} \qquad \Delta > \frac{108}{3} \qquad \text{ou} \qquad 36$$

a lieu d'un bout à l'autre des tables, attendu que 43 est la plus petite valeur de Δ [1].

[1] Pour que l'erreur commise soit moindre que $\frac{1}{100}$, il suffit que $\frac{21}{40(\Delta-1)} + \frac{1}{200}$ soit $< \frac{1}{100}$, d'où $\Delta > 106$.

Nous avons supposé égale à 4 la caractéristique de log N. Supposons-la maintenant quelconque, et soit $k+\frac{L'}{10^7}$ la valeur approchée donnée de log N (k entier positif ou négatif, $0 < L' < 10^7$). Posons, comme précédemment,

$$\log N = k + \frac{L'+\alpha}{10^7}.$$

Soit N_1 le nombre ayant pour logarithme $4+\frac{L'+\alpha}{10^7}$. On a

$$N = 10^{k+\frac{L'+\alpha}{10^7}}, \qquad N_1 = 10^{4+\frac{L'+\alpha}{10^7}},$$

d'où

$$N = N_1 \times 10^{k-4}.$$

En prenant $4+\frac{L'}{10^7}$ comme valeur approchée de log N_1, nous calculons, comme nous venons de l'indiquer, une valeur approchée N'_1 de N_1, l'erreur commise étant moindre que

$$\frac{|\alpha|+\frac{1}{2}+\frac{1}{40}}{\Delta-1}+\frac{1}{200}.$$

Si nous prenons $N'_1 \times 10^{k-4}$ comme valeur approchée de N, nous commettrons une erreur moindre que

$$\left[\frac{|\alpha|+\frac{1}{2}+\frac{1}{40}}{\Delta-1}+\frac{1}{200}\right]10^{k-4}.$$

Si α est égal à 0, c'est-à-dire si log N est connu exactement, cette erreur est moindre que $\frac{2}{100}\times 10^{k-4}$ ou que $2\times 10^{k-6}$ (1).

196. Soit, par exemple, $\log N = 2{,}5147312$. Cherchons d'abord le nombre N_1 dont le logarithme est 4,5147312. La connaissance de N_1 entraîne celle de N, car on a

$$N = \frac{N_1}{100}.$$

---

(1) Elle est moindre que 10^{k-6}, si Δ est plus grand que 106.

La table nous apprend que le nombre N_1 est compris entre

$$32713 \quad \text{et} \quad 32714,$$

dont les logarithmes ont pour valeurs approchées

$$4{,}5147204 \quad \text{et} \quad 4{,}5147336.$$

On a donc ici

$$\Delta = 132, \qquad \delta = 108,$$

et il s'agit de trouver le nombre $\frac{p}{100}$ (p entier positif) le plus voisin de $\frac{108}{132}$. Pour cela, reportons-nous à la table des parties proportionnelles intitulée 132. Nous y trouvons

$$132 \times 0{,}8 = 105{,}6$$

et

$$132 \times 0{,}9 = 118{,}8.$$

On a donc

$$0{,}8 < \frac{108}{132} < 0{,}9.$$

Si de $\frac{108}{132}$ nous retranchons 0,8, il nous reste $\frac{2{,}4}{132}$. Or 24 est compris entre 13,2 et 26,4 et se rapproche plus du second nombre que du premier. Donc la fraction $\frac{2{,}4}{132}$ est comprise entre $\frac{1}{100}$ et $\frac{2}{100}$ et se rapproche plus de $\frac{2}{100}$ que de $\frac{1}{100}$. Donc enfin la fraction $\frac{108}{132}$ est comprise entre $\frac{81}{100}$ et $\frac{82}{100}$, et se rapproche plus du second nombre que du premier.

En résumé, nous avons 32713,82 comme valeur approchée de N_1, et 327,1382 comme valeur approchée de N. L'erreur commise sur N est moindre que 10^{2-6} ou $\frac{1}{10^4}$, car 132 est > 106.

Voici la manière habituelle de disposer le calcul :

$$\begin{array}{rl} \log N_1 = & 4{,}5147312 \\ \log 32713 = & \underline{4{,}5147204} \qquad (\Delta = 132) \\ & \phantom{4{,}51}108 \\ 0{,}8\ldots\ldots & \phantom{4{,}5}\underline{1056} \\ & \phantom{4{,}514}24 \\ 0{,}02\ldots\ldots & \phantom{4{,}51}264 \end{array}$$

$$N_1 = 32713{,}82, \qquad N = 327{,}1382$$

197. Exemple de calcul logarithmique. — Supposons qu'il s'agisse de calculer le nombre

$$X = \frac{AB^p\sqrt[q]{C}}{DE},$$

A, B, C, D, E étant des nombres décimaux positifs donnés, p et q des entiers positifs donnés plus grands que 1.

On commence par calculer les logarithmes des nombres A, B. C, D, E, en commettant chaque fois une erreur moindre que $\frac{1}{10^7} + \frac{1}{4 \times 10^8}$; puis on applique la formule

$$\log X = \log A + \log(B^p) + \log \sqrt[q]{C} + \log \frac{1}{D} + \log \frac{1}{E}\cdot$$

Ce calcul donne lieu aux remarques suivantes :

1° Soit $n + f$ la valeur approchée de $\log B$, n désignant la partie entière (positive ou négative), et f étant une fraction décimale comprise entre 0 et 1. $pn + pf$ est une valeur approchée de $\log(B^p)$, l'erreur étant moindre que $\frac{p}{10^7} + \frac{p}{4 \times 10^8}\cdot$ Soit n' le plus grand entier contenu dans pf: $n' \leqslant pf < n' + 1$: la valeur approchée de $\log(B^p)$ pourra se mettre sous la forme $(pn + n') + f'$, f' étant, comme f, un nombre décimal compris entre 0 et 1.

2° Soit L la valeur approchée de $\log C$, de sorte que l'on $\log C = L + \varepsilon$, avec $|\varepsilon| < \frac{1}{10^7} + \frac{1}{4 \times 10^8}\cdot$ On en cor

clut $\log \sqrt[q]{C} = \frac{L}{q} + \frac{\varepsilon}{q}$. Appelons L′ la fraction ayant pour dénominateur 10^7 et pour numérateur un nombre entier qui est la plus voisine de $\frac{L}{q}$; on a

$$\log \sqrt[q]{C} = L' + \eta + \frac{\varepsilon}{q}, \qquad \text{avec} \qquad |\eta| < \frac{1}{2 \times 10^7};$$

de sorte que, si l'on prend L′ pour valeur approchée de $\log \sqrt[q]{C}$, on commet une erreur $< \frac{1}{10^7}\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4q \times 10^8}$, et *a fortiori* $< \frac{1 + \frac{1}{40q}}{10^7}$, puisque q est au moins égal à 2. Le calcul de L′ ne présente aucune difficulté si la partie entière de L est positive ou nulle. Supposons-la négative :

$$L = -n + f,$$

n et f étant positifs. Soit $-r$ le premier des nombres $0, -1, -2, \ldots$, qui, ajouté à $-n$, donne un multiple de q, et posons

$$-(n + r) = qn',$$

n' étant < 0. On a

$$L = qn' + r + f, \qquad \frac{L}{q} = n' + \frac{r + f}{q},$$

et il ne reste plus qu'à chercher la fraction $\frac{m}{10^7}$ (m entier positif) la plus voisine de $\frac{r+f}{q}$, qui est compris entre 0 et 1.

3° Connaissant log D, comment calculer $\log \frac{1}{D}$? Désignons, comme dans la première remarque, par $n + f$ la valeur approchée de log D. On a

$$\log D = n + f + \varepsilon,$$

d'où

$$\log \frac{1}{D} = -\log D = -n - f - \varepsilon, \qquad |\varepsilon| < \frac{1}{10^7} + \frac{1}{4 \times 10^8}.$$

Pour faire disparaître cette partie décimale négative, on met

le nombre $-n-f$ sous la forme $-(n+1)+(1-f)$. Ainsi on obtiendra la caractéristique de $\log\frac{1}{D}$ en ajoutant algébriquement $+1$ à celle de $\log D$ et en changeant le signe du résultat; puis on obtiendra la partie décimale de $\log\frac{1}{D}$ en retranchant de 1 la partie décimale de $\log D$ (¹). Ajoutons que le nombre $\log\frac{1}{D}$ s'appelle quelquefois le *complément logarithmique* ou le *cologarithme* de D, et se représente par colog D.

4° Appelons enfin N la somme (algébrique) des caractéristiques de $\log A$, $\log B^p$, $\log\sqrt[q]{C}$, colog D, colog E, et F la somme (arithmétique) de leurs parties décimales. Soit n le plus grand entier contenu dans F; on a $F = n+f$, $0 \leqslant f < 1$. L'erreur commise en prenant $(N+n)+f$ pour valeur approchée de $\log X$ est moindre que

$$3\left(\frac{1}{10^7}+\frac{1}{4\times 10^8}\right)+\frac{p}{10^7}+\frac{p}{4\times 10^8}+\frac{1}{10^7}+\frac{1}{4q\times 10^8}$$

ou que

$$\frac{4+p}{10^7}+\frac{3+p+\frac{1}{q}}{4\times 10^8}.$$

En nous reportant à ce qui a été dit plus haut, nous voyons que l'erreur commise sur X est moindre que

$$\left[\frac{4+p+\frac{3+p+\frac{1}{q}}{40}+\frac{1}{2}+\frac{1}{40}}{\Delta-1}+\frac{1}{200}\right]10^{N+n-4},$$

ou que

$$\left[\frac{4+p+\frac{1}{2}}{\Delta-1}+\frac{4+p+\frac{1}{q}}{40(\Delta-1)}+\frac{1}{200}\right]10^{N+n-4},$$

(¹) Cette soustraction se fait par la règle mécanique que voici : on retranche de 9 toutes les décimales *sauf la dernière*, et de 10 la dernière décimale de log D.

Δ étant la différence tabulaire qui figure dans la recherche de X.

Nous allons mettre à profit plusieurs de ces remarques dans l'exemple numérique que voici.

198. Calculer le nombre $X = \dfrac{A^2\sqrt[3]{B}}{\sqrt[4]{C}}$, avec

$A = 32{,}41275,\qquad B = 7{,}185363,\qquad C = 0{,}6791824.$

Calculs auxiliaires.

1° Calcul de $\log A^2$.

$\log 32412 = 4{,}5107058$ (134)
0,7 938
0,05 67

$\log 32412{,}75 = 4{,}51071585$
$\log A = 1{,}5107158$
$\log A^2 = 3{,}0214316$

2° Calcul de $\log \sqrt[3]{B}$.

$\log 71853 = 4{,}8564449$ (60)
0,6 36
0,03 18

$\log 71853{,}63 = 4{,}85644868$
$\log B = 0{,}8564487$
$\log \sqrt[3]{B} = 0{,}2854829$

3° Calcul de $\operatorname{colog} \sqrt[4]{C}$.

$\log 67918 = 4{,}8319849$ (64)
0,2 128
0,04 256

$\log 67918{,}24 = 4{,}831986436$
$\log C = \bar{1}{,}8319864$
$\log \sqrt[4]{C} = \bar{1}{,}9579966$
$\operatorname{colog} \sqrt[4]{C} = 0{,}0420034$

Calculs définitifs.

$\log A^2 = 3{,}0214316$
$\log \sqrt[3]{B} = 0{,}2854829$
$\operatorname{colog} \sqrt[4]{C} = 0{,}0420034$

$\log X = 3{,}3489179$
$\log X_1 = 4{,}3489179$
$\log 22331 = 4{,}3489082$ ($\Delta = 194$)
0,5 . . . 97

$X_1 = 22331{,}5$
$X = 2233{,}15$

Dans le cas présent, l'erreur $\dfrac{\alpha}{10^7}$ commise sur $\log X$ est moindre que $\left(\dfrac{1}{10^7} + \dfrac{1}{4 \times 10^8}\right)\left(2 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4}\right)$, parce que

les divisions par 3 et par 4 se font exactement; ainsi on a

$$| \alpha | < \frac{41}{40}\left(2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) < 3.$$

L'erreur commise sur X est d'ailleurs moindre que

$$\frac{| \alpha | + \frac{1}{2} + \frac{1}{40}}{\lambda - 1} \times 10^{3-4},$$

parce que $\frac{97}{194}$ est *exactement* 0,5. Cette erreur est donc moindre que $\frac{3 + \frac{21}{40}}{1930} = \frac{141}{77200}$. Elle est plus petite que $\frac{1}{500}$ ou $\frac{2}{1000}$. La valeur exacte de X est donc comprise entre 2233,148 et 2233,152.

Équations exponentielles.

199. On appelle *équation exponentielle* toute équation de la forme

(1) $$a^x = b,$$

a étant un nombre positif donné différent de 1. Si b est $\leqslant 0$, l'équation n'a aucune solution. Supposons $b > 0$; alors l'équation admet une solution et une seule donnée par la formule

$$x \log a = \log b, \qquad \text{d'où} \qquad x = \frac{\log b}{\log a}.$$

On ramène à la résolution de l'équation (1) celle de l'équation

(2) $$a^{(b^x)} = c,$$

a, b, c étant trois nombres positifs donnés, et les nombres a et b étant différents de 1. Prenons pour inconnue auxiliaire $b^x = y$. On obtient y à l'aide de l'équation

(3) $$a^y = c,$$

qui est de la forme (1), et qui donne

$$y = \frac{\log c}{\log a}.$$

Pour que l'équation proposée ait une solution, il faut que y soit positive, c'est-à-dire que l'on ait

$$(a - 1)(c - 1) > 0 :$$

c doit donc être différent de 1, et a et c doivent être simultanément inférieurs à 1 ou simultanément supérieurs à 1. y étant connu, on obtient x par l'équation

(4) $$b^x = y,$$

également de la forme (1), et qui donne

$$x = \frac{\log y}{\log b}.$$

En résumé, si a, b, c sont trois nombres positifs et différents de 1, si, de plus, $(a - 1)(c - 1)$ est > 0, l'équation (2) a une solution et une seule, et la résolution de cette équation se ramène à la résolution de deux équations de la forme (1). Dans tout autre cas, l'équation (2) n'a aucune solution.

Problèmes sur les intérêts composés.

200. Problème I. — On place un capital a (évalué en francs) au taux de $100r$ pour 100, et, à la fin de chaque année, on ajoute au capital les intérêts que l'on vient de recueillir : c'est ce qui s'appelle *placer le capital à intérêts composés*. Que sera devenu le capital au bout d'un temps N (évalué en années) ?

Soit n la partie entière de N, et posons

$$N = n + f \qquad (0 \leqslant f < 1)$$

Au bout d'un an, le capital a a rapporté des intérêts égaux à ar, et a acquis une valeur égale à

$$a + ar = a(1 + r) = a'.$$

Ce capital a' à son tour a acquis au bout d'un an une valeur égale à

$$a'(1 + r) = a(1 + r)^2 = a'';$$

le capital a'' acquiert au bout d'un an la valeur

$$a''(1 + r) = a(1 + r)^3, \quad \text{etc.}$$

On voit ainsi que, au bout de n ans, le capital a a acquis une valeur égale à

$$a(1+r)^n = a^{(n)}.$$

Pendant le temps f, le capital $a^{(n)}$ rapporte des intérêts égaux à $a^{(n)}fr$; ces intérêts, joints au capital $a^{(n)}$, constituent la somme $a^{(n)}(1+fr)$; telle est la valeur acquise par le capital a au bout du temps N; si on l'appelle A, on a

$$(1) \qquad A = a(1+r)^n(1+rf).$$

Cette formule, dite *formule des intérêts composés*, résout le problème. On calcule A par logarithmes.

Problème II. — Quel capital faut-il placer à intérêts composés, au taux de $100r$ pour 100, pendant un temps N, pour retirer au bout de ce temps une somme A ?

Soit a ce capital, et soit, comme précédemment,

$$N = n + f,$$

n étant entier, et f compris entre 0 et 1. La formule (1) résout encore le problème : elle donne

$$a = \frac{A}{(1+r)^n(1+rf)};$$

d'où

$$\log a = \log A + n \log \frac{1}{1+r} + \log \frac{1}{1+rf}.$$

Problème III. — Pendant combien de temps faut-il placer un capital a, à intérêts composés et au taux de $100r$ pour 100, pour retirer au bout de ce temps une somme A ?

Le problème n'est évidemment raisonnable que si A est supérieur à a. Supposons donc $A > a$; appelons N le temps cherché, n la partie entière de N, et soit

$$N = n + f \qquad (0 \leqslant f < 1).$$

La formule (1) donne

$$\log A = \log a + n \log (1+r) + \log (1+rf),$$

d'où

$$\frac{\log A - \log a}{\log (1+r)} = n + \frac{\log (1+rf)}{\log (1+r)}.$$

La fraction positive $\frac{\log A - \log a}{\log(1+r)}$ est connue ; soit n' le plus grand entier non supérieur à cette fraction :

$$n' \leqslant \frac{\log A - \log a}{\log(1+r)} < n' + 1,$$

et posons

$$\frac{\log A - \log a}{\log(1+r)} = n' + R \qquad (0 \leqslant R < 1).$$

On a

$$n + \frac{\log(1+rf)}{\log(1+r)} = n' + R,$$

et comme $\frac{\log(1+rf)}{\log(1+r)}$ et R sont tous deux au moins égaux à 0 et plus petits que 1, on a nécessairement

$$n = n', \qquad \log(1+rf) = R\log(1+r).$$

Si donc on appelle ρ le nombre ayant pour logarithme $R\log(1+r)$, f est donné par l'équation

$$1 + rf = \rho, \qquad \text{d'où} \qquad f = \frac{\rho - 1}{r}.$$

Remarque. — On simplifie dans la pratique la résolution de ce problème en substituant à la formule (1) la formule approchée

$$(2) \qquad A = a(1+r)^{N}\ [1].$$

On en tire

$$N = \frac{\log A - \log a}{\log(1+r)} = n' + R.$$

On trouve pour n la même valeur n' que précédemment, mais pour f la valeur R au lieu de $\frac{\rho-1}{r}$; on est ainsi dispensé du calcul de ρ.

Dans le cas où le nombre f est une fraction $\frac{p}{q}$, remplacer la formule exacte (1) par la formule approchée (2) revient à supposer que l'on *capitalise* les intérêts non tous les ans, mais

[1] Cette formule (2) n'est autre que la formule (1) lorsque N est entier.

tous les $q^{\text{ièmes}}$ d'année, en choisissant toutefois l'intérêt de 1 franc en un $q^{\text{ième}}$ d'année de manière que ce franc acquière, au bout d'un an, la valeur $1+r$.

Appelons, en effet, x cet intérêt. Le nombre de $q^{\text{ièmes}}$ d'année contenus dans la durée totale du placement est $nq+p$. En raisonnant comme pour établir la formule (1), on reconnaît sans peine que la valeur acquise par le capital a au bout de ce temps est

$$(3) \qquad A = a(1+x)^{nq+p}.$$

En particulier, la valeur acquise par 1 franc au bout d'un an est ce que devient le second membre pour $a=1$, $n=1$, $p=0$; cette valeur doit être $1+r$: on a donc, pour déterminer x, l'équation

$$(1+x)^q = 1+r, \qquad \text{d'où} \qquad 1+x = (1+r)^{\frac{1}{q}}.$$

Si l'on remplace $1+x$ par cette valeur dans le second membre de la formule (3), on obtient

$$A = a(1+r)^{\frac{nq+p}{q}} = a(1+r)^{n+\frac{p}{q}};$$

c'est bien la formule (2).

Problème IV. — A quel taux faut-il placer à intérêts composés un capital a pour que la valeur acquise par ce capital au bout du temps $N = n+f$ soit A?

Nous allons montrer que la seule condition de possibilité du problème est $A > a$. La formule (1) peut en effet s'écrire

$$(1+r)^n(1+rf) = \frac{A}{a}.$$

On voit que l'inconnue r est racine de l'équation

$$\varphi(x) = \frac{A}{a}, \qquad \varphi(x) = (1+x)^n(1+xf);$$

or si l'on fait croître x d'une manière continue à partir de 0, la fonction $\varphi(x)$ croît d'une manière continue à partir de 1, car ses deux facteurs sont positifs et croissants; d'ailleurs, cette

fonction augmente indéfiniment en même temps que x : elle prend donc une fois et une seule la valeur $\frac{A}{a}$.

Le calcul de l'inconnue r est facile lorsque f est égal à 0 : on a alors

$$n \log(1 + r) = \log A - \log a,$$

d'où

$$\log(1 + r) = \frac{1}{n} (\log A - \log a).$$

Dans le cas général, on a la formule

$$(4) \quad \log(1 + r) = B - \frac{1}{n} \log(1 + rf), \quad B = \frac{1}{n} (\log A - \log a).$$

Cette formule ne résout pas le problème, puisque son second membre renferme l'inconnue. Commençons par négliger le second terme du second membre : la partie restante sera le logarithme, non de $1 + r$, mais d'un nombre $1 + r_1$ supérieur à $1 + r$. Calculons le nombre r_1 supérieur à r, puis mettons-le à la place de r dans le second membre de la formule (4) : nous obtiendrons ainsi le logarithme d'un nombre $1 + r_2$ inférieur à $1 + r$. Calculons le nombre r_2, et mettons-le à la place de r dans le second membre de la formule (4); nous obtiendrons ainsi le logarithme d'un nombre $1 + r_3$ supérieur à $1 + r$, mais inférieur à $1 + r_1$. En remplaçant r par r_3 dans le second membre de la formule (4), on obtient le logarithme d'un nombre $1 + r_4$ inférieur à $1 + r$, mais supérieur à $1 + r_2$, et ainsi de suite. On forme ainsi deux suites de nombres :

$$r_1, \quad r_3, \quad r_5, \quad \ldots\ldots,$$
$$r_2, \quad r_4, \quad r_6, \quad \ldots\ldots,$$

les premiers supérieurs à r et décroissants, les seconds inférieurs à r et croissants. Si l'on prend, pour valeur approchée de r, par exemple r_3 ou r_4, on commet une erreur moindre que $r_3 - r_4$; en prenant $\frac{r_3 + r_4}{2}$ comme valeur approchée de r, on commet une erreur moindre que $\frac{r_3 - r_4}{2}$.

Il nous reste, pour compléter ceci, à montrer que r_k tend vers r lorsque k augmente indéfiniment. A cet effet, posons

$$\log(1+r_k) = u_k, \qquad \log(1+r) = u;$$

on en conclut

$$r_k = 10^{u_k} - 1, \qquad r = 10^u - 1:$$

tout revient donc à prouver que u_k tend vers u. Or on a

$$u_k = B - \frac{1}{n}\log(1+r_{k-1}f);$$

$$u = B - \frac{1}{n}\log(1+rf);$$

$$u_k - u = \frac{1}{n}\log\frac{1+rf}{1+r_{k-1}f}.$$

Désignons par δ_k la valeur absolue de $u_k - u$, c'est-à-dire $u_k - u$ si k est impair et $u - u_k$ si k est pair; nous allons voir que l'on a, quel que soit k,

$$\delta_k < \frac{1}{n}\delta_{k-1}.$$

En effet, si k est impair, on a

$$\delta_k = u_k - u = \frac{1}{n}\log\frac{1+rf}{1+r_{k-1}f} < \frac{1}{n}\log\frac{1+r}{1+r_{k-1}},$$

car la fonction $\dfrac{1+rx}{1+r_{k-1}x}$ est croissante. Par suite, on a

$$\delta_k < \frac{1}{n}\delta_{k-1}.$$

Si k est pair, on a

$$\delta_k = u - u_k = \frac{1}{n}\log\frac{1+r_{k-1}f}{1+rf} < \frac{1}{n}\log\frac{1+r_{k-1}}{1+r}.$$

Donc, dans ce cas encore, δ_k est inférieur à $\dfrac{1}{n}\delta_{k-1}$.

Multiplions membre à membre les $k-1$ inégalités :

$$\delta_2 < \frac{1}{n}\delta_1, \qquad \delta_3 < \frac{1}{n}\delta_2, \ldots, \qquad \delta_k < \frac{1}{n}\delta_{k-1};$$

il vient

$$\delta_k < \frac{1}{n^{k-1}}\delta_1:$$

δ_k tend donc bien vers 0 quand k augmente indéfiniment.

Ce problème, comme le précédent, se simplifie par l'emploi de la formule approchée (2); elle donne en effet

$$\log A = \log a + N \log (1 + r),$$

d'où

$$\log (1 + r) = \frac{\log A - \log a}{N}.$$

Soit ρ le nombre ayant pour logarithme la fraction positive $\frac{\log A - \log a}{N}$ $(\rho > 1)$; on a

$$1 + r = \rho, \qquad \text{d'où} \qquad r = \rho - 1.$$

Problèmes sur les annuités.

201. Problème I. — Une personne prête à une autre une somme A; le débiteur rembourse la dette au moyen de n paiements égaux, le premier ayant lieu au bout d'un an, le second au bout de deux ans, etc. Calculer la valeur du paiement annuel, le taux de l'intérêt étant de $100r$ pour 100.

Soit a la valeur de l'annuité. Supposons que le prêteur place à intérêts composés chaque somme a dès qu'il l'a reçue; il a ainsi, à l'époque du dernier paiement, amassé un capital égal à

$$a(1 + r)^{n-1} + a(1 + r)^{n-2} + \ldots + a(1 + r) + a = a\frac{(1 + r)^n - 1}{r}.$$

Ce capital doit être le même que celui qu'il aurait obtenu au bout de n ans en plaçant la somme A à intérêts composés : il doit donc être égal à

$$A(1 + r)^n.$$

On trouve ainsi la formule

$$(1) \qquad a\frac{(1 + r)^n - 1}{r} = A(1 + r)^n,$$

connue sous le nom de *formule des annuités*. On en tire

$$a = \frac{Ar(1 + r)^n}{(1 + r)^n - 1} = \frac{Arb}{b - 1}, \qquad b = (1 + r)^n.$$

On calcule d'abord b au moyen de la formule

$$\log b = n \log(1+r),$$

puis on a

$$\log a = \log A + \log r + \log b + \log \frac{1}{b-1}.$$

Voici un autre moyen d'arriver à la formule (1) :

Un an après le prêt, et avant le premier paiement, la dette est de

$$A(1+r);$$

elle n'est plus que de

$$A(1+r)-a$$

après le premier paiement. Deux ans après le prêt, et avant le second paiement, la dette est de

$$[A(1+r)-a](1+r) = A(1+r)^2 - a(1+r);$$

elle n'est plus que de

$$A(1+r)^2 - a(1+r) - a$$

après le second paiement. En continuant de la sorte, on voit que, immédiatement après le $p^{ième}$ paiement, le montant de la dette est de

$$A(1+r)^p - a(1+r)^{p-1} - a(1+r)^{p-2} \dots - a(1+r) - a$$

ou de

$$A(1+r)^p - a\frac{(1+r)^p - 1}{r}.$$

En écrivant que cette expression est nulle pour $p = n$, on retrouve la formule (1).

Problème II. — Quelle est la condition pour que l'on puisse rembourser une dette A au moyen d'un certain nombre d'annuités égales à a, le taux de l'intérêt étant de $100r$ pour 100? Si cette condition est remplie, quel est le nombre des annuités à payer?

Il faut et il suffit que l'équation (1), dans laquelle on considère n comme inconnue, admette une solution entière positive. Or cette équation peut s'écrire

$$(a - Ar)(1+r)^n = a.$$

Elle n'a aucune solution si a est égal à Ar. Supposons $a \neq Ar$; il faut alors calculer n de façon que l'on ait

$$(1+r)^n = \frac{a}{a - Ar}.$$

On a donc à résoudre une équation exponentielle en n. Cette équation n'a aucune solution si a est $< Ar$; supposons $a > Ar$. Alors elle admet la solution unique

$$n = \frac{\log a - \log(a - Ar)}{\log(1+r)};$$

cette valeur de n est positive, mais en général non entière.

Ainsi il faut avant tout que a soit supérieur à Ar; on pouvait prévoir cette condition en remarquant que Ar représente les intérêts annuels de la somme prêtée A. Il faut ensuite que le quotient positif

$$\frac{\log a - \log(a - Ar)}{\log(1+r)}$$

soit entier. Si cette condition est remplie, et si n est la valeur de ce quotient, on remboursera exactement la dette A au moyen de n annuités égales à a.

Remarque. — Supposons que le quotient précédent, au lieu d'être entier, soit compris entre les deux nombres entiers consécutifs n et $n+1$:

$$n < \frac{\log a - \log(a - Ar)}{\log(1+r)} < n + 1.$$

On tire de là, par un calcul facile,

$$\frac{Ar(1+r)^{n+1}}{(1+r)^{n+1} - 1} < a < \frac{Ar(1+r)^n}{(1+r)^n - 1};$$

a est donc inférieur à l'annuité qui éteindrait la dette en n années, mais supérieur à l'annuité qui éteindrait la dette en $n+1$ années. On pourra éteindre la dette en versant, immédiatement après la $n^{ième}$ annuité a, une somme égale à

$$A(1+r)^n - \frac{a[(1+r)^n - 1]}{r}.$$

Problème III. — Quel doit être le taux de l'intérêt pour que la dette A soit remboursée au moyen de n annuités a ?

Le problème n'est évidemment raisonnable que si na est $>$ A. Supposons cette condition remplie. La formule (1) peut s'écrire

$$\frac{(1+r)^n - 1}{r(1+r)^n} = \frac{A}{a};$$

r est donc racine de l'équation

$$\varphi(x) = \frac{A}{a}, \qquad \varphi(x) = \frac{(1+x)^n - 1}{x(1+x)^n}.$$

Nous allons démontrer que cette équation a une racine positive et une seule. A cet effet, écrivons $\varphi(x)$ comme il suit :

$$\varphi(x) = \frac{1}{(1+x)^n}\,\frac{(1+x)^n-1}{(1+x)-1} = \frac{(1+x)^{n-1}+(1+x)^{n-2}+\cdots+(1+x)+1}{(1+x)^n},$$

ou $$\varphi(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2} + \cdots + \frac{1}{(1+x)^{n-1}} + \frac{1}{(1+x)^n}.$$

Il est clair que, dans l'intervalle $(0, +\infty)$, cette fonction est continue et décroissante. x croissant d'une manière continue à partir de 0, la fonction $\varphi(x)$ décroît d'une manière continue à partir de n ; elle tend vers 0 quand x augmente indéfiniment : elle prend donc une fois et une seule la valeur $\frac{A}{a}$, qui est inférieure à n. La condition $na > A$ est donc suffisante pour que le problème soit possible.

Pour avoir l'inconnue r à $\frac{1}{100}$ près, on substituera dans $\varphi(x)$, à la place de x, les nombres $\frac{1}{100}, \frac{2}{100}, \ldots,$ jusqu'à ce qu'on obtienne deux résultats comprenant $\frac{A}{a}$; si l'on trouve

$$\varphi\left(\frac{p}{100}\right) > \frac{A}{a} > \varphi\left(\frac{p+1}{100}\right),$$

on en conclut

$$\frac{p}{100} < r < \frac{p+1}{100}.$$

Pour avoir r à $\frac{1}{1000}$ près, on substituera, à la place de x, les nombres $\frac{p}{100}+\frac{1}{1000}$, $\frac{p}{100}+\frac{2}{1000}$, etc. Si l'on trouve

$$\varphi\left(\frac{p}{100}+\frac{q}{1000}\right) > \frac{A}{a} > \varphi\left(\frac{p}{100}+\frac{q+1}{1000}\right),$$

on en conclut

$$\frac{p}{100}+\frac{q}{1000} < r < \frac{p}{100}+\frac{q+1}{1000}.$$

Cette approximation est en général suffisante.

On abrège les tâtonnements en remarquant que l'on a

$$\frac{a}{A}-\frac{1}{n} < r < \frac{a}{A};$$

en effet, le nombre

$$\varphi\left(\frac{a}{A}\right) = \frac{A}{a}\cdot\frac{\left(1+\frac{a}{A}\right)^n - 1}{\left(1+\frac{a}{A}\right)^n}$$

est évidemment moindre que $\frac{A}{a}$. Posons d'ailleurs

$$\frac{a}{A}-\frac{1}{n} = \alpha$$

et formons $\varphi(\alpha)$:

$$\varphi(\alpha) = \frac{(1+\alpha)^n - 1}{\alpha(1+\alpha)^n};$$

l'inégalité

$$\varphi(\alpha) > \frac{A}{a} \qquad \text{ou} \qquad \varphi(\alpha) > \frac{n}{1+n\alpha}$$

équivaut à l'inégalité

$$(1+\alpha)^n > 1+n\alpha,$$

qui est vraie, puisque le nombre α est positif. Il suffira donc de substituer dans $\varphi(x)$ des nombres appartenant à l'intervalle $\left(\frac{a}{A}-\frac{1}{n},\ \frac{a}{A}\right)$.

III. — DU NOMBRE e.

202. Nous commencerons par faire quelques remarques tirées de la théorie des séries.

Considérons les deux séries

$$(1) \qquad u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$$

et

$$(2) \qquad u_{p+1}, u_{p+2}, \ldots, u_{p+n}, \ldots,$$

dont la seconde s'obtient en supprimant dans la première les p premiers termes; nous allons montrer qu'elles sont de même nature.

Appelons, en effet, S_n la somme des n premiers termes de la série (1) et Σ_n la somme des n premiers termes de la série (2). On a

$$\Sigma_n = S_{p+n} - S_p, \qquad \text{d'où} \qquad S_{p+n} = \Sigma_n + S_p.$$

Si donc, n augmentant indéfiniment, S_{p+n} tend vers une limite S, par cela même Σ_n tend vers une limite $S - S_p$. Et de même, si Σ_n tend vers une limite Σ, S_{p+n} tend vers $\Sigma + S_p$. Ainsi la convergence de l'une quelconque des deux séries entraîne la convergence de l'autre; par suite, la divergence de l'une quelconque des deux séries entraîne la divergence de l'autre. On voit de plus qu'entre les sommes S et Σ des deux séries supposées convergentes existe la relation $S = S_p + \Sigma$; de sorte que Σ *est l'erreur commise en prenant* S_p *pour valeur approchée de* S.

203. Soit

$$(1) \qquad u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$$

une première série *à termes tous positifs*, et

$$(2) \qquad v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n, \ldots$$

une seconde série à termes tous positifs et *convergente*. Supposons qu'on ait

$$(3) \qquad u_1 \leqslant v_1, \quad u_2 \leqslant v_2, \quad u_3 \leqslant v_3, \quad \ldots, \quad u_n \leqslant v_n, \quad \ldots.$$

Dans ces conditions : 1° *la série* (1) *est convergente ;* 2° la somme de la série (1) est *inférieure* à la somme de la série (2), à moins qu'on n'ait $u_n = v_n$, quel que soit n.

Appelons, en effet, S_n la somme des n premiers termes de la série (1), Σ_n la somme des n premiers termes de la série (2), enfin Σ la somme de cette série. On a, quel que soit n,

$$S_n \leqslant \Sigma_n, \qquad \Sigma_n < \Sigma, \qquad \text{d'où} \qquad S_n < \Sigma.$$

D'ailleurs S_n augmente avec n, puisque les termes de (1) sont tous positifs : donc S_n tend vers une limite S au plus égale à Σ.

La différence non négative $\Sigma - S$ est la somme de la série

$$v_1 - u_1, \quad v_2 - u_2, \quad v_3 - u_3, \quad \ldots, \quad v_n - u_n, \quad \ldots,$$

dont aucun terme n'est négatif. Cette somme ne peut être nulle que si tous ses termes sont nuls.

204. Considérons la série

(1) $$u_0, \ u_1, \ u_2, \ \ldots, \ u_n, \ \ldots,$$

dans laquelle on a

$$u_0 = 1, \quad u_1 = \frac{1}{1}, \quad u_2 = \frac{1}{1.2}, \quad \ldots, \quad u_n = \frac{1}{1.2.3\ldots n}, \quad \ldots.$$

C'est une série à termes tous positifs dont les termes, à partir du quatrième, sont moindres que ceux de la série

(2) $$2, \quad 1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{8}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{2^{n-1}}, \quad \ldots.$$

Or la série (2) est une progression géométrique décroissante de raison $\frac{1}{2}$; elle est donc convergente : donc la série (1) l'est aussi. La somme de la série (1) est le nombre désigné en analyse par la lettre e.

Posons

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = S_n,$$

et rendons-nous compte de l'erreur commise en prenant S_n pour valeur approchée de e. Cette erreur est la somme de la série convergente

(3) $$u_{n+1}, \quad u_{n+2}, \quad \ldots, \quad u_{n+p}, \quad \ldots,$$

dont les termes à partir du second sont respectivement moindres que les termes de même rang de la série convergente

(4) $$\frac{u_n}{n+1}, \quad \frac{u_n}{(n+1)^2}, \quad \ldots, \quad \frac{u_n}{(n+1)^p}, \quad \ldots.$$

Or la somme de cette série (4) est égale à

$$\frac{\dfrac{u_n}{n+1}}{1 - \dfrac{1}{n+1}} = \frac{u_n}{n}.$$

Par suite, l'erreur commise est moindre que $\frac{u_n}{n}$. On a donc, quel que soit n,

$$0 < e - S_n < \frac{u_n}{n}.$$

Pour $n = 1$, cette double inégalité devient

$$2 < e < 3.$$

Ainsi le nombre e est compris entre 2 et 3.

Le nombre e est irrationnel[1]. Si, en effet, e était égal à une fraction $\frac{m}{n}$, on aurait

$$0 < \frac{m}{n} - S_n < \frac{u_n}{n},$$

et par suite, en multipliant par $1.2.3\ldots n$ les deux membres de chacune de ces deux inégalités :

$$0 < N < \frac{1}{n},$$

N désignant le nombre $\left(\frac{m}{n} - S_n\right) \times 1.2\ldots n$, lequel est entier.

Ce résultat est absurde, puisque $\frac{1}{n}$ est inférieur à 1.

205. Voici la propriété fondamentale du nombre e, celle à laquelle est dû le rôle de ce nombre en analyse :

Théorème. — Considérons la fonction $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$. Nous avons vu qu'elle est définie et continue dans les deux intervalles $(-\infty, -1-\varepsilon)$, $(+\varepsilon, +\infty)$: la variable x peut donc grandir indéfiniment par valeurs positives ou par valeurs négatives. Nous allons faire voir que, dans les deux cas, *la fonction y tend vers une limite*, et que *cette limite est égale à e.*

Pour cela, considérons d'abord l'expression $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$, dans laquelle m est un nombre positif et entier, et démontrons qu'elle tend vers e lorsque m augmente indéfiniment.

On a, en développant $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ par la formule du binome :

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = 1 + \frac{m}{1} \cdot \frac{1}{m} + \frac{m(m-1)}{1.2} \cdot \frac{1}{m^2} + \ldots\ldots$$
$$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2\ldots p} \cdot \frac{1}{m^p} + \ldots\ldots$$
$$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-m+1)}{1.2\ldots m} \cdot \frac{1}{m^m},$$

---

(1) Il y a plus : toute puissance de e est irrationnelle ; et, plus généralement, e ne peut être racine d'une équation $a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m = 0$ à coefficients rationnels.

ce qu'on peut écrire

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1+\frac{1}{1}+\frac{1-\frac{1}{m}}{1.2}+\dots\dots$$
$$+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\dots\left(1-\frac{p-1}{m}\right)}{1.2\dots p}+\dots\dots$$
$$+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\dots\left(1-\frac{m-1}{m}\right)}{1.2\dots m}.$$

Lorsque m augmente, tous les termes de ce développement augmentent (sauf les deux premiers, qui ne dépendent pas de m); le nombre des termes augmente également, et, comme ils sont tous positifs, il en résulte que $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ augmente avec m. D'autre part, les deux premiers termes du développement de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ sont égaux aux deux premiers termes de la série qui définit le nombre e, et les termes suivants du développement de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ sont respectivement moindres que les termes de même rang de la série e : $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ est donc, quel que soit m, inférieur à e. Dès lors, $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ tend vers une limite l, et l'on a

$$l \leqslant e.$$

Ce point étant établi, nous allons montrer que, quel que soit l'entier positif p, l est supérieur à la somme S_p des $p+1$ premiers termes de la série e. Prenons, en effet, pour p un entier positif quelconque, et supposons $m > p$; puis désignons par Σ_p la somme des $p+1$ premiers termes du développement de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ et par R_p la somme des termes restants. On a

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = \Sigma_p + R_p.$$

Le nombre p restant fixe, faisons augmenter m indéfiniment; alors Σ_p tend vers S_p, et R_p tend vers une limite positive. On a donc

$$l = S_p + \text{un nombre positif},$$

et par suite

$$l > S_p.$$

Ainsi, on a, quel que soit p,

$$S_p < l \leqslant e,$$

et on en conclut

$$e - l < e - S_p.$$

Cela posé, soit ε un nombre positif quelconque; il existe un entier positif p tel qu'on ait

$$e - S_p < \varepsilon;$$

on a donc *a fortiori*

$$e - l < \varepsilon,$$

et cela n'est possible que si l est égal à e.

Considérons maintenant la fonction $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, et faisons croître x indéfiniment par valeurs positives quelconques. Soit m le plus grand entier non supérieur à x : $m \leqslant x < m+1$. On a

$$1 + \frac{1}{m+1} < 1 + \frac{1}{x} \leqslant 1 + \frac{1}{m},$$

et par suite

$$\left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^m < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^m \leqslant \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x;$$

la première inégalité résulte de ce que la fonction x^m, où m est positif, est croissante; la seconde résulte de la croissance de la fonction a^x, dans laquelle a est plus grand que 1. On a de même

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1} \geqslant \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{m+1} > \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

Ainsi on a

$$\left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^m < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1}.$$

Or les deux expressions

$$\left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^m \quad \text{et} \quad \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1}$$

tendent vers e quand m augmente indéfiniment, car on peut les écrire respectivement

$$\left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^{m+1} : \left(1 + \frac{1}{m+1}\right) \quad \text{et} \quad \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \times \left(1 + \frac{1}{m}\right),$$

et sous cette forme on voit qu'elles sont, l'une le quotient, l'autre le produit d'une expression qui tend vers e par une expression qui tend vers 1. Donc, quel que soit le nombre positif ε, il existe un entier positif r tel que, pour $m \geqslant r$, ces deux expressions soient comprises entre $e - \varepsilon$ et $e + \varepsilon$; pour $x \geqslant r$, l'expression $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ sera elle-même comprise entre $e - \varepsilon$ et $e + \varepsilon$:

c'est dire que $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ tend vers e quand x augmente indéfiniment par valeurs positives.

Il reste à montrer que la fonction $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ tend également vers e quand x augmente indéfiniment par valeurs négatives. Posons pour cela $x=-x'$; nous aurons

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\left(1-\frac{1}{x'}\right)^{-x'},$$

et, quand x augmente indéfiniment par valeurs négatives, x' augmente indéfiniment par valeurs positives. Or on a

$$\left(1-\frac{1}{x'}\right)^{-x'}=\left(\frac{x'}{x'-1}\right)^{x'}=\left(1+\frac{1}{x'-1}\right)^{x'-1}\times\left(1+\frac{1}{x'-1}\right).$$

x' augmentant indéfiniment par valeurs positives, nous savons que le premier facteur tend vers e ; le second tend d'ailleurs vers 1 : donc y tend vers e.

Le théorème est donc complètement démontré. On peut encore l'énoncer en disant que la fonction

$$y=(1+x)^{\frac{1}{x}},$$

définie et continue dans les deux intervalles $(-1+\varepsilon,\ -\varepsilon)$, $(+\varepsilon,\ +\infty)$, tend vers e quand x tend vers 0. Car si on pose

$$x=\frac{1}{z},$$

on a

$$y=\left(1+\frac{1}{z}\right)^z:$$

x tendant vers 0, z augmente indéfiniment, et y tend vers e.

206. Applications : 1° La fonction

$$\frac{\mathrm{L}(1+x)}{x},$$

définie dans les deux intervalles $(-1+\varepsilon,\ -\varepsilon)$, $(+\varepsilon,\ +\infty)$, tend vers 1 quand x tend vers 0, car on a

$$\frac{\mathrm{L}(1+x)}{x}=\mathrm{L}(1+x)^{\frac{1}{x}};$$

x tendant vers 0, $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ tend vers e, et $\mathrm{L}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ tend vers Le, c'est-à-dire vers 1.

2° Soit α et β deux fonctions de x qui, x tendant vers a, ten-

dent simultanément vers 0. On a

$$\frac{L(1+\alpha)}{\beta} = \frac{L(1+\alpha)}{\alpha} \times \frac{\alpha}{\beta},$$

d'où il suit que, si l'une des fonctions

$$\frac{L(1+\alpha)}{\beta}, \qquad \frac{\alpha}{\beta}$$

a une limite, l'autre a une limite égale. Il en résulte que, si l'une de ces fonctions n'a pas de limite, l'autre n'en a pas non plus; en particulier, si l'une augmente indéfiniment, il en est de même de l'autre.

On a les mêmes conclusions à l'égard des fonctions $\frac{L(1+\alpha)}{L(1+\beta)}$ et $\frac{\alpha}{\beta}$, car on a

$$\frac{L(1+\alpha)}{L(1+\beta)} = \frac{L(1+\alpha)}{\alpha} \times \frac{\beta}{L(1+\beta)} \times \frac{\alpha}{\beta}.$$

3° Soit u et v deux fonctions de x, et supposons que, x tendant vers a, u tende vers 1 et que v augmente indéfiniment. Pour voir ce que devient la fonction u^v, on la met sous la forme e^{vLu}, et on cherche ce que devient vLu. Si on pose

$$u = 1 + \alpha, \qquad v = \frac{1}{\beta},$$

α et β tendent vers 0 quand x tend vers a, et on a

$$vLu = \frac{L(1+\alpha)}{\beta}.$$

Ce qui précède permet de substituer à la fonction vLu la fonction $\frac{\alpha}{\beta}$ qui, dans certains cas, est plus facile à étudier. Soit, par exemple,

$$u = 1 + kx, \qquad v = \frac{1}{x},$$

d'où

$$vLu = \frac{L(1+kx)}{x};$$

x tendant vers 0, vLu tend vers k. La fonction $(1+kx)^{\frac{1}{x}}$ tend donc vers e^k quand x tend vers 0.

207. On appelle *logarithme népérien* d'un nombre positif x le logarithme de ce nombre pris dans le système de base e. Au lieu d'écrire $\log_e x$, on écrit Lx.

Nous avons vu que, a et a' étant deux nombres positifs quelconques différents de 1, le rapport $\frac{\log_a x}{\log_{a'} x}$ a une valeur indépendante de x ; cette valeur est $\log_a a'$ ou $\frac{1}{\log_{a'} a}$. Faisons $a' = e$: nous aurons, quel que soit x,

$$\frac{\log_a x}{\mathrm{L}x} = \log_a e = \frac{1}{\mathrm{L}a}.$$

Ce nombre $\log_a e$ ou $\frac{1}{\mathrm{L}a}$, par lequel il faut multiplier les logarithmes népériens des différents nombres pour obtenir les logarithmes de ces nombres dans le système de base a, s'appelle le *module* du système de logarithmes dont la base est a. Ainsi le module du système décimal est

$$\mathrm{M} = \log e = \frac{1}{\mathrm{L}\,10}.$$

Nous donnerons dans le chapitre VI des séries permettant de calculer les logarithmes népériens, et, par suite, les logarithmes décimaux des différents nombres entiers.

EXERCICES

1. Etudier les fonctions

$$a^{x^2}, \quad a^{-x^2}, \quad a^{\frac{1}{x}}, \quad a^{-\frac{1}{x}}, \quad a^{\frac{1}{x^2}}, \quad a^{-\frac{1}{x^2}};$$

$$a^{\alpha x^2+\beta x+\gamma}, \quad a^{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}, \quad a^{\frac{1}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}};$$

$$\log_a(\alpha x^2 + \beta x + \gamma), \quad \log_x a.$$

2. Trouver un nombre positif et rationnel a tel que $\log_a 20$ soit rationnel.

3. Quels sont, dans le système de base $\mathrm{B} = a^\alpha b^\beta c^\gamma$ (a, b, c sont des nombres premiers différents et α, β, γ des entiers positifs), les nombres rationnels ayant des logarithmes rationnels ?

4. Soit n un nombre entier positif, et supposons que le nombre n^p, écrit dans le système décimal, ait q chiffres. Démontrer que $\frac{q-1}{p}$ est le logarithme décimal de n à $\frac{1}{p}$ près par défaut. Exemple : $n = 2$, $p = 10$.

5. Le rapport des logarithmes de deux nombres pris dans un même système est indépendant de la base.

6. Soit $\log(n+1) - \log n = \delta_n$; démontrer : 1° que δ_n diminue quand n augmente ; 2° qu'il en est de même de $\delta_n - \delta_{n+1}$.

7. Calculer, avec les tables à 7 décimales, le nombre

$$x = \frac{(\sqrt[5]{3226727})^6}{(\sqrt[7]{10732872})^4},$$

et chercher une limite de l'erreur commise.

8. Résoudre les équations

$$\log(7x-9)^2 + \log(3x-4)^2 = 2 ;$$

$$\log\sqrt{5x+8} + \frac{1}{2}\log(2x+3) = \log 15.$$

9. A quel taux 40000^fr^, placés à intérêts composés pendant 8 ans 2 mois, deviennent-ils 64391^fr^,47 ?

***10.** On considère les trois fonctions

$$C(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad S(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad T(x) = \frac{S(x)}{C(x)} ;$$

vérifier les identités

$$C^2(x) - S^2(x) \equiv 1 ;$$

$$C(x+y) \equiv C(x)C(y) + S(x)S(y) ;$$

$$S(x+y) \equiv S(x)C(y) + C(x)S(y) ;$$

$$T(x+y) \equiv \frac{T(x)+T(y)}{1+T(x)T(y)} ;$$

$$[C(x)+S(x)]^n \equiv C(nx) + S(nx),$$

n étant un entier positif.

Etudier la variation de ces trois fonctions.

***11.** Trouver la limite, pour $x = 0$, de $\dfrac{a^x - b^x}{x}$. La − Lb

***12.** Trouver la limite, pour x infini, de $\left(1 - \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\right)^{\sqrt[3]{3x^3-1}}$.

IV. — FONCTIONS CIRCULAIRES

208. Considérons un cercle de centre O dont le rayon est égal à l'unité de longueur. On peut parcourir dans deux sens opposés la circonférence de ce cercle ; nous distinguerons ces deux sens en appelant l'un *sens positif*, l'autre *sens négatif*. Soit enfin A un point arbitrairement choisi sur la circonférence ; nous appellerons ce point *l'origine des arcs*. Au cercle O nous donnerons le nom de *cercle trigonométrique*.

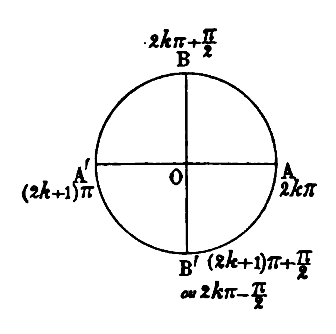
Cela posé, à tout nombre x, positif ou négatif, nous ferons correspondre un point M du cercle trigonométrique d'après la règle suivante : M est le point d'arrivée d'un mobile qui, parti de A, a parcouru sur la circonférence un chemin égal à $|x|$, en marchant constamment dans le sens positif, ou constamment dans le sens négatif, suivant que le nombre x est lui-même positif ou négatif. Nous appellerons ce point M *l'extrémité de l'arc x*.

Chaque point M est l'extrémité d'une infinité d'arcs ; cherchons leur expression générale. Soit α le chemin parcouru par un mobile, parti de A, et qui marche constamment dans le sens positif, au moment où il parvient en M pour la première fois : α, qui est compris entre 0 et 2π, est le plus petit arc positif terminé en M. On voit facilement que les autres arcs positifs terminés en M sont $\alpha + 2\pi$, $\alpha + 4\pi$, $\alpha + 6\pi$, etc. ; leur expression générale est $\alpha + 2k\pi$, k étant un entier *positif* quelconque. De même, les arcs négatifs terminés en M sont $\alpha - 2\pi$, $\alpha - 4\pi$, $\alpha - 6\pi$, etc. ; leur expression générale est $\alpha - 2k\pi$, k étant un entier *positif* quelconque. De sorte que l'expression générale de tous les arcs terminés en M sera $\alpha + 2k\pi$, k étant un entier quelconque, positif, nul ou négatif.

Plus généralement, soit β l'un quelconque des arcs terminés en M : il existe un entier k_1 tel qu'on ait

$$\alpha + 2k_1\pi = \beta, \qquad \text{d'où} \qquad \alpha = \beta - 2k_1\pi.$$

Par suite, l'expression générale des arcs terminés en M est $\beta+2(k-k_1)\pi$; maintenant, $k-k_1$ étant, comme k, un entier quelconque, on arrive à ce résultat important : L'expression générale des arcs terminés en M est $\alpha+2k\pi$, α étant l'un quelconque de ces arcs, et k pouvant prendre toutes les valeurs entières. On voit sur la figure ci-contre l'expression générale des arcs terminés en A, B, A′, B′ $\left(B, A', B' \text{ sont les extrémités des arcs } \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\right)$.



Il suit de là que, pour que deux arcs α et β aient leurs extrémités confondues, il faut et il suffit que leur différence $\beta-\alpha$ soit un multiple pair de π.

Les extrémités M, M′ de deux arcs opposés sont symétriques par rapport à A′A. D'après cela, α étant l'un quelconque des arcs terminés en M, et M′ étant le symétrique de M par rapport à A′A, $2k\pi-\alpha$ sera l'expression générale des arcs terminés en M′. Donc, pour que deux arcs α, β aient leurs extrémités symétriques par rapport à A′A, il faut et il suffit que leur somme $\alpha+\beta$ soit un multiple pair de π.

209. Théorème. — *Soit x, y deux nombres quelconques. Soit B l'extrémité de l'arc x, A étant l'origine des arcs; soit C l'extrémité de l'arc y. B étant l'origine des arcs : le point C est l'extrémité de l'arc $x+y$ avec A pour origine.*

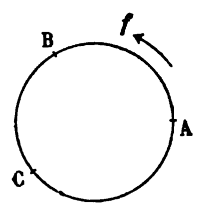


Fig. 1.

Faisons, en effet, parcourir à un mobile l'arc géométrique ABC dans le sens ABC; soit α le chemin qu'il a parcouru quand il arrive en B, $\alpha+\beta$ celui qu'il a parcouru quand il arrive C. L'origine des arcs étant A, le point B est l'extrémité de l'a $+\alpha$, si le mobile a dû marcher dans le sens positif f (*fig.* 1 de l'arc $-\alpha$, s'il a dû marcher dans le sens négatif (*fig.* 2

de même, C est l'extrémité de l'arc $\pm \beta$ avec l'origine B et de l'arc $\pm (\alpha + \beta)$ avec l'origine A. Il existe donc deux entiers k, k_1 tels qu'on ait

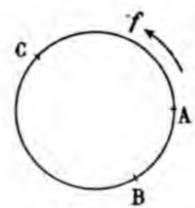


Fig. 2.

$$2k\pi \pm \alpha = x, \qquad 2k_1\pi \pm \beta = y,$$

d'où

$$x + y = 2(k + k_1)\pi \pm (\alpha + \beta) ;$$

les signes supérieurs se rapportent à la fig. 1 et les signes inférieurs à la fig. 2. Le point C est donc bien l'extrémité de l'arc $x + y$, A étant pris pour origine.

Corollaires : 1° Les extrémités M, M′ des deux arcs α, $\alpha + \pi$, avec une même origine A, sont symétriques par rapport au centre O, car M′ est l'extrémité de l'arc π, l'origine des arcs étant M. D'après cela, α étant l'un quelconque des arcs terminés en M, et M′ étant le symétrique de M par rapport à O, l'expression générale des arcs terminés en M′ est $(2k + 1)\pi + \alpha$. Donc, pour que deux arcs α, β aient leurs extrémités symétriques par rapport à O, il faut et il suffit que leur différence $\beta - \alpha$ soit un multiple impair de π.

2° Les extrémités M et M′ des deux arcs a et b, avec une même origine A, sont symétriques par rapport au diamètre OC passant par l'extrémité C de l'arc $\frac{a + b}{2}$. Car on a

$$a = \frac{a + b}{2} + \frac{a - b}{2}, \qquad b = \frac{a + b}{2} + \frac{b - a}{2},$$

de sorte que M et M′ sont les extrémités des deux arcs opposés $\frac{a - b}{2}$ et $\frac{b - a}{2}$, C étant pris pour origine.

On conclut de là (en désignant toujours par B, A′, B′ les extrémités des arcs $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$) : 1° que les extrémités M et M′ des deux arcs a et $\pi - a$ sont symétriques par rapport au diamètre B′B ; 2° que les extrémités M et M′ des deux arcs a et $\frac{\pi}{2} - a$ sont symétriques par rapport à la bissectrice des

angles AOB, A'OB'. Les arcs $\pi - a$ et $\frac{\pi}{2} - a$ sont respectivement appelés le *supplément* et le *complément* de l'arc a. Ainsi deux arcs a et b sont *supplémentaires* ou *complémentaires* l'un de l'autre, suivant qu'on a $a + b = \pi$, ou $a + b = \frac{\pi}{2}$.

D'après ce qui précède, α étant l'un quelconque des arcs terminés en M, et M' étant le symétrique de M par rapport à B'B, l'expression générale des arcs terminés en M' est $(2k+1)\pi - \alpha$. Donc, pour que deux arcs α, β aient leurs extrémités symétriques par rapport à B'B, il faut et il suffit que leur somme $\alpha + \beta$ soit un multiple impair de π.

210. Fonctions $\cos x$ **et** $\sin x$. — Choisissons le diamètre A'A pour axe des abscisses, le diamètre B'B pour axe des ordonnées ; et, comme sens positifs respectifs, les sens A'A et B'B. Soit M l'extrémité de l'arc x. L'abscisse de ce point M se nomme $\cos x$, l'ordonnée de ce point se nomme $\sin x$ [1]. $\cos x$ et $\sin x$ sont des fonctions définies dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$.

Ce qui résulte tout d'abord de cette définition, c'est que les valeurs absolues de $\cos x$ et de $\sin x$ ne dépassent jamais l'unité, et que l'*on a, quel que soit* x,

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Une autre conséquence, c'est la *périodicité* des deux fonctions $\cos x$ et $\sin x$.

On dit qu'une fonction $f(x)$ est *périodique* lorsqu'il existe un nombre ω tel qu'on ait, quel que soit x,

$$f(x+\omega) = f(x).$$

Le nombre ω s'appelle la *période*. On voit aisément que, k étant un entier quelconque, une telle fonction prend des valeurs égales pour deux valeurs quelconques de x différant de $k\omega$, d'où il suit d'abord que, pour étudier sa variation, on peut se borner à faire varier x dans un intervalle $(a, a+\omega)$ d'amplitude ω, et ensuite que, C étant la ligne qui représente la

---

(1) Prononcez : *cosinus* x et *sinus* x.

marche de la fonction dans un tel intervalle, il suffit, pour obtenir la ligne entière représentant la marche de $f(x)$, de donner à C une infinité de translations OL et une infinité de translations LO, L étant le point de $x'x$ d'abscisse ω.

Revenons maintenant aux fonctions $\cos x$ et $\sin x$. Quel que soit x, les deux arcs x et $x+2\pi$ ont la même extrémité : $\cos x$ et $\sin x$ admettent donc la période 2π, et l'on a, pour toutes les valeurs de x et de l'entier k,

$$\cos(x+2k\pi) = \cos x, \qquad \sin(x+2k\pi) = \sin x.$$

Théorème. — *Lorsque deux arcs sont complémentaires, le sinus de l'un quelconque d'entre eux est égal au cosinus de l'autre.*

Soit, en effet, x et x' ces deux arcs. Nous avons vu que leurs extrémités M et M' sont symétriques par rapport à la bissectrice des angles AOB, A'OB'. Proposons-nous de démontrer que l'on a

$$\cos x = \sin x'.$$

Abaissons, à cet effet, du point M la perpendiculaire MP sur A'A, et du point M' la perpendiculaire M'P' sur B'B. Les droites A'A, B'B étant elles-mêmes symétriques par rapport à la bissectrice des angles AOB, A'OB', il en sera de même des pieds P, P' de ces perpendiculaires. Donc on a OP = OP'. En outre, si P est sur OA, P' est sur OB ; si P est sur OA', P' est sur OB' : car, dans la symétrie considérée, ce sont les *demi-droites* OA, OB qui se correspondent. On a donc $\overline{OP} = \overline{OP'}$, et par suite $\cos x = \sin x'$.

Ainsi on a, quel que soit x,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x, \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x.$$

Deux arcs opposés, ayant leurs extrémités symétriques par rapport à A'A, *ont leurs cosinus égaux, leurs sinus opposés :*

$$\cos(-x) = \cos x, \qquad \sin(-x) = -\sin x.$$

$\cos x$ est donc une fonction paire et $\sin x$ une fonction impaire.

Deux arcs supplémentaires, ayant leurs extrémités symétriques

par rapport à B'B, *ont leurs cosinus opposés, leurs sinus égaux :*

$$\cos(\pi - x) = -\cos x, \qquad \sin(\pi - x) = \sin x.$$

Deux arcs différant de π, ayant leurs extrémités symétriques par rapport à l'origine, *ont des cosinus et des sinus opposés :*

$$\cos(x + \pi) = -\cos x, \qquad \sin(x + \pi) = -\sin x.$$

Signalons encore les formules

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(-x) = -\sin x,$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(-x) = \cos x.$$

Pour que deux arcs aient le même cosinus, il faut et il suffit que leurs extrémités soient confondues ou symétriques par rapport à A'A, c'est-à-dire que *leur différence ou leur somme soit un multiple pair de* π. Les racines de l'équation

$$\cos x = \cos \alpha$$

sont, d'après cela, les arcs $2k\pi + \alpha$ et les arcs $2k\pi - \alpha$.

Pour que deux arcs aient le même sinus, il faut et il suffit que leurs extrémités soient confondues ou symétriques par rapport à B'B, c'est-à-dire que *leur différence soit un multiple pair ou leur somme un multiple impair de* π. D'après cela, les racines de l'équation

$$\sin x = \sin \alpha$$

sont les arcs $2k\pi + \alpha$ et les arcs $(2k + 1)\pi - \alpha$.

Enfin, *pour que deux arcs aient à la fois le même sinus et le même cosinus*, il faut et il suffit qu'ils aient la même extrémité, c'est-à-dire que *leur différence soit un multiple pair de* π. De sorte que les racines communes aux deux équations

$$\cos x = \cos \alpha \qquad \text{et} \qquad \sin x = \sin \alpha$$

sont les arcs $2k\pi + \alpha$.

En particulier, les racines des équations

$$\sin x = 0, \qquad \sin x = +1, \qquad \sin x = -1$$

sont respectivement les arcs

$$x = k\pi, \qquad x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, \qquad x = 2k\pi - \frac{\pi}{2};$$

celles des équations

$$\cos x = 0, \qquad \cos x = +1, \qquad \cos x = -1$$

sont respectivement les arcs

$$x = k\pi + \frac{\pi}{2}, \qquad x = 2k\pi, \qquad x = (2k+1)\pi.$$

Les deux fonctions $\cos x$ *et* $\sin x$ *sont continues pour toute valeur de la variable.* Soit x_1 un nombre quelconque et ε un nombre positif. Supposons d'abord que l'extrémité M de l'arc x_1 ne tombe ni en A ni en A' $(x_1 \neq k\pi)$. Portons sur le cercle O, à partir de M, et de part et d'autre de M, deux arcs MN, MN' égaux à ε ; nous pouvons toujours supposer ε assez petit pour que les points N et N' appartiennent au même demi-cercle AA' que M. Des points M, N, N' abaissons sur A'A les perpendiculaires MP, NQ, N'Q'. x variant entre $x_1 - \varepsilon$ et $x_1 + \varepsilon$, $\cos x$ varie entre $\overline{OQ}$ et $\overline{OQ'}$. Or on a

$$\overline{OQ} = \overline{OP} + \overline{PQ} = \cos x_1 + \overline{PQ},$$

et de même

$$\overline{OQ'} = \cos x_1 + \overline{PQ'} ;$$

et, comme les deux longueurs PQ, PQ' sont évidemment moindres que ε, on voit que, pour x compris entre $x_1 - \varepsilon$ et $x_1 + \varepsilon$, $\cos x$ reste compris entre $\cos x_1 - \varepsilon$ et $\cos x_1 + \varepsilon$; c'est dire que la fonction $\cos x$ est continue pour $x = x_1$.

Si maintenant le point M tombe en A ou en A', alors les points N, N' sont symétriques par rapport à A'A, et les points Q, Q' sont confondus. Supposons M en A. x variant de $x_1 - \varepsilon$ à $x_1 + \varepsilon$, $\cos x$ reste supérieur à OQ, inférieur ou égal à 1 ; la différence $1 - \cos x$ ou $\cos x_1 - \cos x$ reste inférieure à AQ, et *a fortiori* à ε. La conclusion est la même.

D'après cela, la fonction $\cos u$, u étant une fonction de x, est continue pour les mêmes valeurs de x que la fonction u elle-même. En particulier, la fonction $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ est continue quel que soit x. Il serait, du reste, facile de le démontrer directement.

Les définitions mêmes de $\cos x$ et de $\sin x$ montrent immé-

diatement comment varient ces fonctions. Voici un tableau indiquant ces variations dans l'intervalle $(-\pi, +\pi)$:

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$+\frac{\pi}{2}$		$+\pi$
$\cos x$	-1	cr.	0	cr.	$+1$	décr.	0	décr.	-1
$\sin x$	0	décr.	-1	cr.	0	cr.	$+1$	décr.	0

Il faut remarquer que la fonction $\cos x$ est ***décroissante*** dans l'intervalle $(0, \pi)$, tandis que la fonction $\sin x$ est ***croissante*** dans l'intervalle $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$.

211. Fonctions $\operatorname{tg} x$ **et** $\operatorname{cotg} x$. — Il est commode de représenter par des notations spéciales les quotients $\frac{\sin x}{\cos x}$ et $\frac{\cos x}{\sin x}$, que l'on rencontre souvent dans les calculs. On pose

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x, \qquad \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{cotg} x\ [1].$$

Les fonctions $\operatorname{tg} x$ et $\operatorname{cotg} x$ sont définies et continues, la première pour toute valeur de x qui n'est pas de la forme $k\pi + \frac{\pi}{2}$, la seconde pour toute valeur de x qui n'est pas de la forme $k\pi$. x tendant vers $k\pi + \frac{\pi}{2}$, $\cos x$ tend vers 0, $\sin x$ tend vers ± 1, de sorte que $\operatorname{tg} x$ augmente indéfiniment. De même, $\operatorname{cotg} x$ augmente indéfiniment, quand x tend vers $k\pi$.

On a, quel que soit x, $\operatorname{tg} x \operatorname{cotg} x = 1$.

Des relations entre les sinus et les cosinus de deux arcs complémentaires, opposés, etc., résultent immédiatement les formules :

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{cotg} x, \qquad \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{tg} x;$$

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x, \qquad \operatorname{cotg}(-x) = -\operatorname{cotg} x;$$

$$\operatorname{tg}(\pi - x) = -\operatorname{tg} x, \qquad \operatorname{cotg}(\pi - x) = -\operatorname{cotg} x;$$

$$\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x, \qquad \operatorname{cotg}(x + \pi) = \operatorname{cotg} x,$$

---

[1] Prononcez : *tangente x* et *cotangente x*.

dont les deux dernières montrent que les fonctions $\operatorname{tg} x$ et $\operatorname{cotg} x$ admettent la période π.

Au reste, on peut retrouver ces formules au moyen des définitions géométriques suivantes de $\operatorname{tg} x$ et de $\operatorname{cotg} x$. Le rayon OM aboutissant à l'extrémité de l'arc x coupe la tangente en A au point T et la tangente en B au point U. Les deux triangles homothétiques OPM, OAT donnent la proportion

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{PM}}{\overline{AT}}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{\cos x}{1} = \frac{\sin x}{\overline{AT}},$$

d'où

$$\overline{AT} = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Ainsi $\operatorname{tg} x$ n'est autre chose que $\overline{AT}$; on a pareillement $\operatorname{cotg} x = \overline{BU}$.

Il résulte de là que, *pour que deux arcs aient des tangentes ou des cotangentes égales*, il faut et il suffit que leurs extrémités soient confondues ou symétriques par rapport à O, c'est-à-dire que *leur différence* soit un multiple pair de π ou un multiple impair de π, c'est-à-dire *soit un multiple de* π. Et les racines de l'équation

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \alpha \qquad \text{ou} \qquad \operatorname{cotg} x = \operatorname{cotg} \alpha$$

sont les arcs $k\pi + \alpha$.

Enfin la fonction. $\operatorname{tg} x$ est *croissante* dans les intervalles où elle est continue; par exemple, dans l'intervalle $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, elle croît de $-\infty$ à $+\infty$. Au contraire, la fonction $\operatorname{cotg} x$ *décroît* dans les intervalles où elle est continue; par exemple, dans l'intervalle $(0, \pi)$, elle décroît de $+\infty$ à $-\infty$.

212. Fonctions circulaires inverses. — Nous avons vu que, dans l'intervalle $(0, \pi)$, la fonction $\cos x$ est continue et décroissante, et qu'elle varie de $+1$ à -1. Il en résulte que l'équation en y

$$(1) \qquad \cos y = x,$$

dans laquelle x est un nombre donné appartenant à l'intervalle

$(-1, +1)$, admet une racine et une seule appartenant à l'intervalle $(0, \pi)$. Cette équation définit donc (nº **185**) y comme fonction continue et décroissante de x dans l'intervalle $(-1, +1)$; la valeur de cette fonction, que nous représenterons par le symbole $\operatorname{arc}\cos x$, est toujours comprise entre 0 et π; ces limites sont atteintes pour $x = +1$ et $x = -1$. L'équation (1) admet une infinité de racines, à savoir les arcs $2k\pi + \operatorname{arc}\cos x$ et les arcs $2k\pi - \operatorname{arc}\cos x$.

De même, dans l'intervalle $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$, la fonction $\sin x$ est continue et croissante, et elle varie de -1 à $+1$. Par suite, l'équation en y

$$(2) \qquad \sin y = x,$$

dans laquelle x est un nombre donné appartenant à l'intervalle $(-1, +1)$, admet une racine et une seule appartenant à l'intervalle $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$. Cette équation définit donc y comme fonction continue et croissante de x dans l'intervalle $(-1, +1)$; la valeur de cette fonction, que nous représenterons par $\operatorname{arc}\sin x$, est toujours comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$; ces limites sont atteintes pour $x = -1$ et $x = +1$. L'équation (2) admet une infinité de racines, à savoir les arcs $2k\pi + \operatorname{arc}\sin x$ et les arcs $(2k+1)\pi - \operatorname{arc}\sin x$.

On verra de même que, x étant un nombre quelconque, l'équation en y

$$(3) \qquad \operatorname{tg} y = x$$

admet une racine et une seule appartenant à l'intervalle $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$. Cette équation définit y comme fonction continue et croissante de x dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$; la valeur de cette fonction, que nous représenterons par $\operatorname{arc}\operatorname{tg} x$, est toujours comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$; quand x augmente indéfiniment par valeurs positives, $\operatorname{arc}\operatorname{tg} x$ tend vers $+\frac{\pi}{2}$; quand x augmente indéfiniment par valeurs négatives, $\operatorname{arc}\operatorname{tg} x$

tend vers $-\frac{\pi}{2}$. Remarquons enfin que l'équation (3) a une infinité de racines, à savoir tous les arcs $k\pi +$ arc tg x.

De même encore l'équation en y

(4) $$\operatorname{cotg} y = x,$$

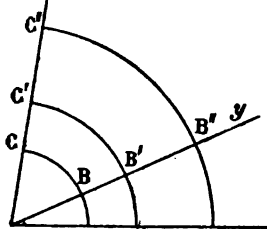
dans laquelle x désigne un nombre quelconque, définit y comme fonction continue et décroissante de x dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$; la valeur de cette fonction, que nous représenterons par arc cotg x, est toujours comprise entre 0 et π. Toutes les racines de l'équation (4) sont les arcs $k\pi +$ arc cotg x.

On démontre aisément, en se fondant sur les définitions précédentes, les relations que voici :

$$\text{arc sin}\, x + \text{arc sin}\,(-x) = 0, \qquad (-1 \leqslant x \leqslant +1);$$
$$\text{arc cos}\, x + \text{arc cos}\,(-x) = \pi, \qquad (-1 \leqslant x \leqslant +1);$$
$$\text{arc tg}\, x + \text{arc tg}(-x) = 0, \quad \text{quel que soit } x;$$
$$\text{arc cotg}\, x + \text{arc cotg}(-x) = \pi, \quad \text{quel que soit } x;$$
$$\text{arc sin}\, x + \text{arc cos}\, x = \frac{\pi}{2}, \qquad (-1 \leqslant x \leqslant +1);$$
$$\text{arc tg}\, x + \text{arc cotg}\, x = \frac{\pi}{2}, \quad \text{quel que soit } x;$$
$$\text{arc tg}\, x + \text{arc tg}\,\frac{1}{x}\ (x \neq 0) = \begin{cases} +\dfrac{\pi}{2} & \text{si } x \text{ est} > 0, \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{si } x \text{ est} < 0. \end{cases}$$

DES PROJECTIONS

213. Du sommet O d'un angle xOy pour centre, et avec différents rayons R, R', R'', ..., décrivons des cercles ; soit l, l', l'', ... les longueurs des arcs interceptés ; on sait qu'on a



$$\frac{l}{R} = \frac{l'}{R'} = \frac{l''}{R''} = \dots;$$

la valeur commune ω de tous ces rapports dépend de la grandeur de l'angle considéré. Il est facile de voir

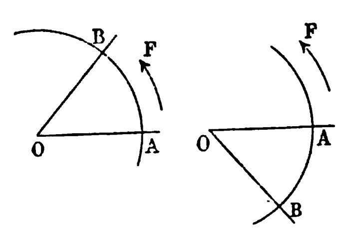
que ce nombre ω est la mesure de l'angle xOy, si l'on prend comme unité d'angle l'angle yOz pour lequel ω est égal à 1, c'est-à-dire qui intercepte sur un cercle quelconque décrit de son sommet comme centre un arc égal au rayon. Car on a, d'après un théorème connu,

$$\frac{\widehat{xOy}}{\widehat{yOz}} = \frac{\text{arc AB}}{\text{arc BC}} = \frac{R\omega}{R} = \omega$$

L'angle yOz s'appelle l'*unité trigonométrique* d'angle, et ω est la *mesure trigonométrique* de l'angle xOy. Ce nombre ω est compris entre 0 et π; il est moindre que $\frac{\pi}{2}$, si l'angle xOy est aigu; supérieur à $\frac{\pi}{2}$, si l'angle xOy est obtus. Deux angles complémentaires ont des mesures trigonométriques de somme égale à $\frac{\pi}{2}$; deux angles supplémentaires ont des mesures trigonométriques de somme égale à π. Observons encore que ω est la longueur de l'arc intercepté par l'angle xOy sur le cercle ayant O pour centre et l'unité de longueur pour rayon, de sorte qu'on a, n étant la mesure de $\widehat{xOy}$ avec le degré pour unité,

$$\omega = \frac{\pi n}{180}.$$

Soit un plan P et un point O dans ce plan. On peut faire tourner une demi-droite OM autour de O dans le plan P dans deux sens différents. Choisissons arbitrairement l'un d'eux, F, que nous appellerons le sens positif; on dit alors que le plan est *orienté*. Soit OA, OB deux demi-droites de ce plan. Décrivons de O comme centre avec l'unité de longueur comme rayon un cercle, qui coupe OA, OB en des points A, B. A étant l'origine des arcs et F le sens positif, le point B est l'extrémité d'une infinité d'arcs; on dit de chacun d'eux qu'il est une *détermination* de (OA, OB). D'après cela :



1° *Toutes les déterminations de* (OA, OB) sont $\alpha + 2k\pi$, α *étant l'une quelconque d'entre elles.*

2° *Toutes les déterminations de* (OA, OB) *et de* (OB, OA) *sont données par les formules*

$$(OA, OB) = 2k\pi \pm \omega, \qquad (OB, OA) = 2k\pi \mp \omega,$$

ω *étant la mesure trigonométrique de* $\widehat{AOB}$; les signes supérieurs se rapportent à la première figure, les signes inférieurs à la seconde. *Quelle que soit la détermination choisie, on a*

$$\cos(OA, OB) = \cos(OB, OA) = \cos\omega.$$

3° *La somme algébrique d'une détermination quelconque de* (OA, OB) *et d'une détermination quelconque de* (OB, OA) *est un multiple pair de* π, ce qu'on exprime ainsi :

$$(OA, OB) + (OB, OA) = 2k\pi.$$

4° OA, OB, OC *étant trois demi-droites du plan* P, *si l'on additionne algébriquement une détermination quelconque de* (OA, OB) *et une détermination quelconque de* (OB, OC), *on obtient une détermination de* (OA, OC). On exprime cette propriété par la formule

$$(1) \qquad (OA, OC) = (OA, OB) + (OB, OC) + 2k\pi,$$

qui s'emploie fréquemment sous la forme suivante :

$$(2) \qquad (OB, OC) = (OA, OC) - (OA, OB) + 2k\pi.$$

Il faut entendre chacune de ces deux égalités (1), (2) comme il suit : à tout système de déterminations de (OA, OB), (OB, OC), (OA, OC) correspond un entier k vérifiant l'égalité considérée.

214. Soit enfin $x'x$, $y'y$ deux axes ayant dans l'espace une position arbitraire. Par un point O quelconque menons les demi-droites OA, OB parallèles respectivement à $x'x$, $y'y$, et dirigées dans les sens $x'x$, $y'y$. Supposons orienté le plan AOB. Par définition, les déterminations de (OA, OB) sont celles de $(x'x, y'y)$; cette définition est légitime, pourvu qu'on suppose tous les plans parallèles orientés de la même façon. Quel que soit le sens positif choisi, on a, d'après ce qui précède,

$$\cos(x'x, y'y) = \cos(y'y, x'x) = \cos\omega,$$

ω étant la mesure trigonométrique de $\widehat{AOB}$.

215. *Un système de projections* est déterminé par un *axe de projection* et par un plan P uniquement assujetti à couper $x'x$. Le plan parallèle à P mené par un point quelconque A de l'espace coupe $x'x$ en a; a s'appelle la *projection de* A *sur* $x'x$ *parallèlement à* P. On appelle *projection d'un vecteur* AB le vecteur ab ayant pour origine la projection de l'origine et pour extrémité la projection de l'extrémité du vecteur AB.

On appelle *contour polygonal* l'ensemble de plusieurs vecteurs, appartenant à des droites différentes, dont le premier est arbitraire, chacun des suivants ayant pour origine l'extrémité du précédent; ce sont les *vecteurs composants* du contour polygonal. On appelle *vecteur résultant* de ce contour le vecteur ayant la même origine que le premier et la même extrémité que le dernier vecteur composant. Ainsi les vecteurs AB, BC, CD, DE constituent le contour polygonal ABCDE, dont le vecteur AE est le vecteur résultant.

Pour abréger, nous appellerons *projection d'un contour polygonal sur un axe* $x'x$ *parallèlement à un plan* P la somme des valeurs algébriques des projections, sur cet axe et parallèlement à ce plan, des vecteurs composants.

Théorème des projections. — *La projection d'un contour polygonal sur un axe parallèlement à un plan est égale à la valeur algébrique de la projection du vecteur résultant.*

Reprenons le contour ABCDE. a, b, c, d, e étant les projections de A, B, C, D, E, il s'agit de faire voir que l'on a

$$\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{cd} + \overline{de} = \overline{ae}.$$

Tout revient à démontrer que, a_1, a_2, ..., a_p étant p points quelconques situés sur un axe $x'x$, on a, quel que soit p :

$$\overline{a_1a_2} + \overline{a_2a_3} + \ldots + \overline{a_{p-1}a_p} = \overline{a_1a_p}.$$

Or c'est démontré pour 3 points; démontrons-le pour 4 points a_1, a_2, a_3, a_4. On a

$$\overline{a_1a_2} + \overline{a_2a_3} = \overline{a_1a_3},$$

d'où

$$\overline{a_1a_2} + \overline{a_2a_3} + \overline{a_3a_4} = \overline{a_1a_3} + \overline{a_3a_4} = \overline{a_1a_4}.$$

Du cas de 4 points, on s'élève au cas de 5 points, etc.

Si, en particulier, le contour est fermé, sa projection est nulle, quels que soient l'axe $x'x$ et le plan P. La projection d'un contour parallèlement à un plan particulier P peut être nulle sans que le contour soit fermé ; il suffit que la droite à laquelle appartient le vecteur résultant soit parallèle à P. Mais si les projections du contour parallèlement à trois plans P, Q, R, *non parallèles à une même droite*, sont nulles séparément, alors on peut affirmer que le contour est fermé.

Lorsque le contour polygonal est plan, on choisit un axe de projection dans le plan du contour. Le plan P coupe ce plan suivant une droite Δ, à laquelle sont parallèles les *projetantes* Aa, Bb, ... Pour que la projection du contour soit nulle, il suffit que la droite à laquelle appartient le vecteur résultant soit parallèle à Δ. Si les projections du contour faites parallèlement à deux droites Δ, Δ' du plan *non parallèles entre elles* sont nulles séparément, le contour est certainement fermé.

216. Considérons un vecteur quelconque AB, et, sur la droite indéfinie à laquelle il appartient, choisissons arbitrairement un sens positif $y'y$; le nombre $\overline{AB}$ est la valeur algébrique du vecteur AB. Soit maintenant CD un second vecteur situé, soit sur $y'y$, soit sur une parallèle à $y'y$; choisissons, dans ce dernier cas, sur cette seconde droite, un sens positif $z'z$ tel qu'un plan qui coupe les deux droites en O et O' laisse les deux demi-droites Oy, O'z d'un même côté. Nous allons montrer qu'entre les valeurs algébriques $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ des vecteurs AB, CD et les valeurs algébriques $\overline{ab}$, $\overline{cd}$ de leurs projections sur un axe $x'x$ parallèlement à un plan P existe la proportion

$$(1) \qquad \frac{\overline{ab}}{\overline{cd}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}.$$

Soit P_1, P_2, P_3, P_4 les plans parallèles à P menés par A, B, C, D; appelons C_1 et D_1 les points d'intersection de P_3 et de P_4 avec $y'y$; ce sont C et D lorsque les deux vecteurs AB et CD sont sur la même droite; en tout cas, $\overline{C_1D_1}$ est égal à

$\overline{CD}$. Les plans parallèles P_1, P_2, P_3 donnent la proportion

$$\frac{\overline{ab}}{\overline{bc}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC_1}};$$

les plans parallèles P_2, P_3, P_4 donnent de même la proportion

$$\frac{\overline{bc}}{\overline{cd}} = \frac{\overline{BC_1}}{\overline{C_1D_1}}.$$

En multipliant membre à membre, on obtient

$$\frac{\overline{ab}}{\overline{cd}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{C_1D_1}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}.$$

De là il résulte :

1° Que *si les deux vecteurs* AB, CD, *situés sur la même droite ou sur deux droites parallèles, ont des valeurs algébriques égales, les valeurs algébriques de leurs projections*, $\overline{ab}$, $\overline{cd}$, *sont aussi égales;*

2° Que *la valeur algébrique d'un vecteur* AB *et celle de sa projection ab sont liées par la relation*

$$\overline{ab} = \overline{AB} \times \overline{cd},$$

$\overline{cd}$ *étant la valeur algébrique de la projection d'un vecteur* CD *situé, soit sur la même droite que* AB, *soit sur une droite parallèle, et dont la valeur algébrique est* $+1$.

217. Cette dernière conclusion est particulièrement importante : elle va nous permettre de traduire le théorème des projections par une relation entre les valeurs algébriques des vecteurs composants et la valeur algébrique du vecteur résultant. Reprenons le système de projections déterminé par l'axe $x'x$ et le plan P. Soit ABCDE un contour polygonal ; sur les droites AB, BC, ..., AE choisissons arbitrairement les sens positif $y'y$, $z'z$, ..., $t't$; puis appelons η, ζ, ..., θ les valeurs algébriques des projections sur $x'x$ parallèlement à P de vecteu[rs] ayant pour valeur algébrique $+1$ et situés respectivem[ent] sur $y'y$, $z'z$, ..., $t't$ (ou sur des droites parallèles). Dès lo[rs]

on aura

$$\overline{ab} = \overline{AB} \times \eta, \quad \overline{bc} = \overline{BC} \times \zeta, \quad \ldots, \quad \overline{ae} = \overline{AE} \times \theta;$$

par suite, le théorème des projections se traduira par l'égalité

$$\overline{AB} \times \eta + \overline{BC} \times \zeta + \cdots = \overline{AE} \times \theta.$$

218. Considérons en particulier le cas où les projections sont *orthogonales*, c'est-à-dire où le plan P est perpendiculaire à l'axe de projection ; dans ce cas, toutes les droites Aa, Bb, ... sont perpendiculaires à cet axe. Il existe, entre la valeur algébrique d'un vecteur et celle de sa projection orthogonale sur un axe une relation simple :

La valeur algébrique de la projection orthogonale du vecteur est égale au produit de la valeur algébrique du vecteur par le cosinus de l'angle des directions positives de l'axe de projection et de l'axe auquel appartient le vecteur.

Ainsi, $x'x$ étant l'axe de projection, $\overline{AB}$ la valeur algébrique d'un vecteur appartenant à un axe $y'y$, $\overline{ab}$ la valeur algébrique de la projection orthogonale de ce vecteur, on a

$$\overline{ab} = \overline{AB} \times \cos(x'x, y'y).$$

Il suffit de démontrer que, CD étant un vecteur pris sur $y'y$ dont la valeur algébrique est $+1$, et $\overline{cd}$ étant la valeur algébrique de la projection orthogonale de ce vecteur, on a $\overline{cd} = \cos(x'x, y'y)$. Or, menons par C l'axe $z'z$ parallèle à $x'x$, et soit ω la mesure trigonométrique de l'angle zCy ; on a $\cos(x'x, y'y) = \cos\omega$. Soit E le point d'intersection de $z'z$ avec le plan mené par D perpendiculairement à $z'z$; on a $\overline{CE} = \overline{cd}$. Le cercle décrit dans le plan zCy de C comme centre avec l'unité de longueur pour rayon coupe la demi-droite Cz en F et la demi-droite Cy en D ; F étant l'origine des arcs, D est l'extrémité de l'arc $+\omega$ ou de l'arc $-\omega$, suivant le sens positif choisi. Dans tous les cas, $\overline{CE}$ est égal à $\cos\omega$: donc on a bien $\overline{cd} = \cos(x'x, y'y)$.

Dès lors, le théorème des projections, appliqué au contour

polygonal ABCDE dans le cas particulier des projections orthogonales, se traduira par l'égalité suivante :

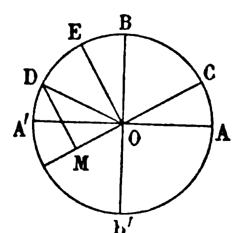
$$\overline{AB}\cos(x'x,\ y'y) + \overline{BC}\cos(x'x,\ z'z) + \ldots = \overline{AE}\cos(x'x,\ t't).$$

Comme précédemment, $x'x$ est l'axe de projection ; et $y'y$, $z'z$, ..., $t't$ sont les sens positifs choisis sur AB, BC, ..., AE.

FORMULES FONDAMENTALES

219. Supposons connus les sinus et les cosinus de n arcs $a, b, c, \ldots, l$; chacun de ces n arcs est déterminé à un multiple près de 2π, et par suite le sinus et le cosinus de la somme $a + b + c + \ldots + l$ sont déterminés sans aucune ambiguïté. De même, lorsqu'on connaît les tangentes de ces n arcs, chacun d'eux est déterminé à un multiple près de π, et la tangente de leur somme est parfaitement déterminée. On nomme *formules d'addition* les formules donnant le sinus et le cosinus de la somme de plusieurs arcs en fonction des sinus et des cosinus de ces arcs, ou la tangente de la somme de plusieurs arcs en fonction des tangentes de ces arcs. On peut les déduire toutes de celle qui donne $\cos(a + b)$ en fonction de $\cos a$, $\cos b$, $\sin a$, $\sin b$. Nous allons établir celle-ci au moyen de la théorie des projections.

Appelons C l'extrémité de l'arc a, A étant l'origine des arcs : puis, C étant pris pour origine, soit D l'extrémité de l'arc b et E l'extrémité de l'arc $+\frac{\pi}{2}$:



$$(OA,\ OC) = a + 2k\pi,$$

$$(OA,\ OE) = a + \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

Le point D est l'extrémité de l'arc $a+b$, A étant pris pour origine. Il résulte de là que $\cos(a + b)$ n'est autre chose que la valeur algébrique de la projection orthogonale du vecteur OD sur l'axe A'A. Si du point D nous abaissons DM perpendiculaire sur OC, OD est le vecteur résultant du contour

OMD. Projetons ce contour orthogonalement sur l'axe A'A, les sens positifs choisis sur les droites OM et MD étant respectivement OC et OE. En vertu du théorème des projections, on a

$$\cos(a+b) = \overline{OM}\cos(OA, OC) + \overline{MD}\cos(OA, OE).$$

Mais $\overline{OM}$ et $\overline{MD}$ sont l'abscisse et l'ordonnée du point D en prenant OC comme axe des x et OE comme axe des y ; on a donc

$$\overline{OM} = \cos b, \qquad \overline{MD} = \sin b,$$

et par suite

$$\cos(a+b) = \cos b \cos a + \sin b \cos\left(a + \frac{\pi}{2}\right),$$

ou

$$(1) \qquad \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

Telle est la formule fondamentale cherchée. En l'appliquant aux arcs a et $b+\frac{\pi}{2}$, on obtient

$$\cos\left(a+b+\frac{\pi}{2}\right) = \cos a \cos\left(b+\frac{\pi}{2}\right) - \sin a \sin\left(b+\frac{\pi}{2}\right),$$

ou

$$(2) \qquad \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$$

En divisant membre à membre les formules (2) et (1), on trouve

$$\frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\cos a \cos b - \sin a \sin b},$$

ou

$$(3) \qquad \operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}.$$

Appliquées aux arcs a et $-b$, ces trois formules deviennent

$$(1)' \qquad \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b,$$

$$(2)' \qquad \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b,$$

$$(3)' \qquad \operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}.$$

Des formules (1), (2), (3), qui résolvent le problème dans le cas de deux arcs, on passe sans peine à celles qui sont relatives

à trois arcs a, b, c. Considérons la somme $a+b+c$ comme formée des deux parties $a+b$ et c; on a

$$\cos(a+b+c) = \cos(a+b)\cos c - \sin(a+b)\sin c,$$

$$\sin(a+b+c) = \sin(a+b)\cos c + \cos(a+b)\sin c,$$

$$\operatorname{tg}(a+b+c) = \frac{\operatorname{tg}(a+b)+\operatorname{tg} c}{1-\operatorname{tg}(a+b)\operatorname{tg} c}.$$

Il suffit maintenant de remplacer, dans les seconds membres de ces égalités, $\cos(a+b)$, $\sin(a+b)$ et $\operatorname{tg}(a+b)$ par leurs valeurs données par les formules (1), (2), (3), pour avoir $\cos(a+b+c)$ et $\sin(a+b+c)$ en fonction des cosinus et des sinus des arcs a, b, c, $\operatorname{tg}(a+b+c)$ en fonction des tangentes de ces arcs. Du cas de trois arcs on passe de même au cas de quatre arcs, et ainsi de suite.

En particulier, on pourra par ce procédé calculer $\cos na$ et $\sin na$ (n étant un entier positif quelconque) en fonction de $\cos a$ et de $\sin a$, $\operatorname{tg} na$ en fonction de $\operatorname{tg} a$. Les formules ainsi obtenues sont les *formules de multiplication* des arcs. Les voici pour $n=2$:

(4) $$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a,$$

(5) $$\sin 2a = 2\sin a\cos a,$$

(6) $$\operatorname{tg} 2a = \frac{2\operatorname{tg} a}{1-\operatorname{tg}^2 a}.$$

220. Voici d'autres formules fréquemment employées :

Combinons l'égalité (4) et l'égalité

(7) $$1 = \cos^2 a + \sin^2 a,$$

par addition et par soustraction : il vient

$$1+\cos 2a = 2\cos^2 a, \qquad 1-\cos 2a = 2\sin^2 a,$$

d'où

$$\frac{1-\cos 2a}{1+\cos 2a} = \operatorname{tg}^2 a.$$

Divisons membre à membre les égalités (4) et (7), pui

égalités (5) et (7) : nous obtenons les formules très importantes

$$\cos 2a = \frac{\cos^2 a - \sin^2 a}{\cos^2 a + \sin^2 a} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 a}{1 + \operatorname{tg}^2 a},$$

$$\sin 2a = \frac{2 \sin a \cos a}{\cos^2 a + \sin^2 a} = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 + \operatorname{tg}^2 a},$$

qui, jointes à la formule (6), nous montrent que les fonctions circulaires d'un arc s'expriment *rationnellement* à l'aide de la tangente de l'arc moitié.

On vérifie sans peine, à l'aide des formules (1), (2), (1)', (2)', les égalités

$$2 \sin a \cos b = \sin (a + b) + \sin (a - b),$$

$$2 \sin a \sin b = \cos (a - b) - \cos (a + b),$$

$$2 \cos a \cos b = \cos (a - b) + \cos (a + b).$$

Enfin, combinons par addition et par soustraction les formules (2), (2)', puis les formules (1), (1)', et posons

$$a + b = p, \qquad a - b = q,$$

d'où

$$a = \frac{p+q}{2}, \qquad b = \frac{p-q}{2};$$

il vient

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2},$$

$$\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2},$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2},$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}.$$

Telles sont les principales formules qu'il est nécessaire de connaître pour l'intelligence de ce qui va suivre.

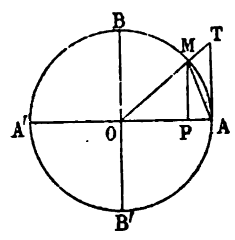
221. Démontrons, pour terminer, l'importante proposition que voici :

Théorème. — *x tendant vers 0, le rapport* $\frac{\sin x}{x}$ *tend vers une limite égale à* 1.

Pour établir ce théorème, nous nous appuierons sur le lemme suivant : x étant compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, on a

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

Soit M l'extrémité de l'arc x. Du point M abaissons MP perpendiculaire sur OA et menons la tangente au point A jusqu'à sa rencontre en T avec le prolongement de OM. L'aire du secteur OAM étant comprise entre l'aire du triangle OAM et celle du triangle OAT, on a



$$\frac{OA \times PM}{2} < \frac{OA \times \text{arc } AM}{2} < \frac{OA \times AT}{2},$$

ou

$$PM < \text{arc } AM < AT,$$

c'est-à-dire

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

Montrons à présent que $\frac{\sin x}{x}$ tend vers 1 quand x tend vers 0. Comme $\frac{\sin x}{x}$ est une fonction paire, il suffit de faire tendre x vers 0 par valeurs positives. Nous supposerons x compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. Le rapport $\frac{\sin x}{x}$ est alors positif et plus petit que 1. Prouvons que, quel que soit le nombre positif ε, il est, à partir d'une valeur de x suffisamment petite, plus grand que $1 - \varepsilon$. Pour cela, divisons par $\sin x$, qui est positif, les deux membres de chacune des inégalités

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x;$$

nous aurons

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$$

ou

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Or, x tendant vers 0, $\cos x$ tend vers 1 : il existe donc un nombre positif α tel que, pour x compris entre 0 et α, on ait

$$1 - \cos x < \varepsilon \qquad \text{ou} \qquad \cos x > 1 - \varepsilon,$$

et par suite *a fortiori*

$$\frac{\sin x}{x} > 1 - \varepsilon.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

D'après cela, la fonction y égale à $\frac{\sin x}{x}$ pour $x \neq 0$ et à 1 pour $x = 0$ est continue pour toute valeur de x.

Corollaire. — Le rapport $\frac{\operatorname{tg} x}{x}$ tend également vers 1 quand x tend vers zéro, car on a

$$\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{\cos x},$$

et les deux facteurs de ce produit tendent vers 1. De même, $\frac{x}{\sin x}$ et $\frac{x}{\operatorname{tg} x}$ tendent vers 1 quand x tend vers zéro.

Application. — Soit y et z deux fonctions de x qui, x tendant vers a, tendent simultanément vers 0. On a

$$\frac{\sin y}{z} = \frac{\sin y}{y} \times \frac{y}{z},$$

d'où il suit que, si l'une des fonctions $\frac{\sin y}{z}$, $\frac{y}{z}$ a une limite, l'autre a une limite égale; il en résulte que, si l'une de ces fonctions n'a pas de limite, l'autre n'en a pas non plus; en particulier, si l'une augmente indéfiniment, il en est de même de l'autre. On a les mêmes conclusions à l'égard des fonctions $\frac{\operatorname{tg} y}{z}$ et $\frac{y}{z}$, et des fonctions $\frac{\sin \text{ ou } \operatorname{tg} y}{\sin \text{ ou } \operatorname{tg} z}$ et $\frac{y}{z}$. Ainsi, par exemple, m et p étant deux constantes, $\frac{\sin mx}{\sin px}$ tend, pour $x = 0$, vers $\frac{m}{p}$.

USAGE DES TABLES DES LOGARITHMES DES FONCTIONS CIRCULAIRES

222. Dans tout ce qui va suivre, il ne sera question que d'arcs positifs moindres qu'un quadrant, arcs que nous supposerons exprimés en degrés, minutes et secondes [1].

Les tables de Dupuis et de Schrön fournissent, à une demi-unité près du 7e ordre décimal, les log sin, les log cos, les log tg, les log cotg de tous les arcs, de 10″ en 10″, entre 0° et 45°. Chaque page contient 60 arcs, et il y a en tout 270 pages : ce sont les pages 290-560 dans Dupuis, 204-474 dans Schrön. Nous tirerons les exemples de la page 486 des tables de Dupuis (page 400 des tables de Schrön).

Supposons d'abord que l'arc donné soit un multiple de 10″.

Exemple I. — Trouver le log sin, le log cos, le log tg et le log cotg de l'arc de 32° 48′ 20″.

La page 486 renferme les arcs compris entre 32° 40′ et 32° 50′. Parcourons, de haut en bas, la première colonne de gauche (colonne des minutes), jusqu'à ce que nous arrivions au nombre 48 ; puis, suivant la ligne horizontale qui contient ce nombre 48, passons dans la seconde colonne de gauche (colonne des secondes) et parcourons-la, de haut en bas, jusqu'à ce que nous arrivions au nombre 20. Nous voici dans la ligne renfermant les logarithmes cherchés. Ils sont inscrits dans les colonnes larges intitulées *en haut* sin, tang, cotg, cos. On trouve ainsi :

$$\log \sin 32^\circ 48' 20'' = \bar{1},7338308 + \varepsilon, \qquad |\varepsilon| < \frac{1}{2\times 10^7};$$
$$\log \cos 32^\circ 48' 20'' = \bar{1},9245450 + \varepsilon', \qquad |\varepsilon'| < \quad \text{»} \quad ;$$
$$\log \operatorname{tg} 32^\circ 48' 20'' = \bar{1},8092858 + \varepsilon_1, \qquad |\varepsilon_1| < \quad \text{»} \quad ;$$
$$\log \operatorname{cotg} 32^\circ 48' 20'' = 0,1907142 + \varepsilon_2, \qquad |\varepsilon_2| < \quad \text{»} \quad .$$

Remarque. — On a, quel que soit x,

$$\operatorname{tg} x \times \operatorname{cotg} x = 1,$$

[1] Ainsi, par exemple, a étant la longueur de l'arc de 32° 48′ 27″,6 pris sur une circonférence de rayon égal à l'unité, ou, ce qui revient au même, la mesure trigonométrique de l'angle de 32° 48′ 27″,6, nous représenterons sin a, cos a, etc. par sin 32° 48′ 27″,6, cos 32° 48′ 27″,6, etc.

d'où

$$\log \operatorname{tg} x + \log \operatorname{cotg} x = 0.$$

Ainsi $\log \operatorname{cotg} x$ n'est, en somme, que $\operatorname{colog} \operatorname{tg} x$, et on aurait pu, à la rigueur, économiser la colonne des cotangentes. On voit ainsi que ε_2 est égal à $-\varepsilon_1$.

Exemple II. — Trouver le log sin, le log cos, le log tg et le log cotg de l'arc de 57° 17′ 30″.

Cet arc est le complément d'un arc compris entre 0° et 45°, à savoir 32° 42′ 30″. On est d'ailleurs dispensé de tout calcul par la disposition même des tables : on n'a qu'à lire *en bas* les titres des colonnes verticales, et *à droite* les nombres de minutes et de secondes. Actuellement, on remontera donc la première colonne à droite jusqu'au nombre 17, puis la seconde colonne à droite jusqu'au nombre 30, et on trouvera, pour les logarithmes cherchés :

$$\log \sin 57^\circ 17' 30'' = \bar{1},9250191 + \varepsilon, \qquad |\varepsilon| < \frac{1}{2 \times 10^7};$$
$$\log \cos 57^\circ 17' 30'' = \bar{1},7326854 + \varepsilon', \qquad |\varepsilon'| < \text{»} \quad ;$$
$$\log \operatorname{tg} 57^\circ 17' 30'' = 0,1923338 + \varepsilon_1, \qquad |\varepsilon_1| < \text{»} \quad ;$$
$$\log \operatorname{cotg} 57^\circ 17' 30'' = \bar{1},8076662 - \varepsilon_1.$$

Remarque. — Dans les tables de Schrön, on a évité les caractéristiques négatives en leur ajoutant 10. Il ne faut donc pas oublier, quand on se sert des tables de Schrön, de retrancher 10 aux caractéristiques de tous les log sin, de tous les log cos, des log tg des arcs inférieurs à 45° et des log cotg des arcs supérieurs à 45°.

223. Voyons maintenant comment il faudra procéder, lorsque l'arc donné ne sera pas un multiple de 10″. Prenons la seconde pour unité. Soit α un multiple de 10 ; les tables fournissent, pour $\log \sin \alpha$, $\log \cos \alpha$, $\log \operatorname{tg} \alpha$, $\log \operatorname{cotg} \alpha$, des valeurs approchées que nous appellerons :

$$n + \frac{L_s}{10^7}, \qquad n' + \frac{L_c}{10^7}, \qquad n'' + \frac{L_t}{10^7}, \qquad n''' + \frac{L_{ct}}{10^7}.$$

L_s, L_c, L_t, L_{ct} sont quatre entiers positifs. Immédiatement à la

suite de l'arc α vient l'arc $\alpha+10$, auquel correspondent les logarithmes :

$$n+\frac{L_s+\Delta_s}{10^7},\quad n'+\frac{L_c-\Delta_c}{10^7},\quad n''+\frac{L_t+\Delta_t}{10^7},\quad n'''+\frac{L_{ct}-\Delta_{ct}}{10^7}.$$

On appelle ***différences tabulaires du sinus, du cosinus, de la tangente et de la cotangente relatives à l'arc*** α les quatre nombres entiers positifs Δ_s, Δ_c, Δ_t et Δ_{ct}. Ils donnent lieu à deux remarques :

1° Les nombres Δ_t et Δ_{ct} sont égaux. On a, en effet :

$$L_{ct}=10^7-L_t,\qquad L_{ct}-\Delta_{ct}=10^7-L_t-\Delta_t,$$

d'où

$$\Delta_{ct}=\Delta_t.$$

2° Il y a, entre les trois nombres Δ_s, Δ_c, Δ_t, la relation

$$\Delta_t=\Delta_s+\Delta_c+\eta,$$

η ayant l'une des valeurs 0, ± 1, ± 2.

On a en effet :

$$\log\sin\alpha=n+\frac{L_s+\varepsilon}{10^7},\quad \log\sin(\alpha+10)=n+\frac{L_s+\Delta_s+\varepsilon_1}{10^7},$$

$$\log\cos\alpha=n'+\frac{L_c+\varepsilon'}{10^7},\quad \log\cos(\alpha+10)=n'+\frac{L_c-\Delta_c+\varepsilon'_1}{10^7},$$

$$\log\operatorname{tg}\alpha=n''+\frac{L_t+\varepsilon''}{10^7},\quad \log\operatorname{tg}(\alpha+10)=n''+\frac{L_t+\Delta_t+\varepsilon''_1}{10^7},$$

tous les ε étant moindres en valeur absolue que $\frac{1}{2}$.

D'autre part, si l'on retranche membre à membre les égalités

$$\log\operatorname{tg}\alpha=\log\sin\alpha-\log\cos\alpha,$$

$$\log\operatorname{tg}(\alpha+10)=\log\sin(\alpha+10)-\log\cos(\alpha+10),$$

il vient

$$\log\operatorname{tg}(\alpha+10)-\log\operatorname{tg}\alpha=[\log\sin(\alpha+10)-\log\sin\alpha]$$
$$+[\log\cos\alpha-\log\cos(\alpha+10)],$$

d'où l'on conclut

$$\Delta_t+\varepsilon''_1-\varepsilon''=\Delta_s+\varepsilon_1-\varepsilon+\Delta_c+\varepsilon'-\varepsilon'_1.$$

Le nombre entier

$$\Delta_t-\Delta_s-\Delta_c=\varepsilon_1+\varepsilon'+\varepsilon''-\varepsilon-\varepsilon'_1-\varepsilon''_1$$

est donc compris entre -3 et $+3$; il a par suite l'une des valeurs 0, ± 1, ± 2.

224. Ces remarques faites, mettons l'arc donné sous la forme $\alpha+\beta$, α étant multiple de 10, β étant compris entre 0 et 10. Soit $n+\frac{L}{10^7}$ la valeur approchée fournie par les tables du logarithme correspondant à l'arc α. Supposons, pour fixer les idées, qu'il s'agisse d'un logarithme sinus, et soit Δ la différence tabulaire du sinus relative à l'arc α. Si, dans l'intervalle $(\alpha, \alpha+10)$, l'accroissement du logarithme était proportionnel à l'accroissement de l'arc, on aurait

$$(1)\quad \log\sin(\alpha+\beta)-\log\sin\alpha = \frac{\beta}{10}[\log\sin(\alpha+10)-\log\sin\alpha],$$

ou, en remplaçant $\log\sin\alpha$ et $\log\sin(\alpha+10)$ par $n+\frac{L}{10^7}$ et $n+\frac{L+\Delta}{10^7}$:

$$\log\sin(\alpha+\beta) = n+\frac{L+\frac{\beta\Delta}{10}}{10^7}.$$

Soit enfin δ l'entier le plus voisin de $\frac{\beta\Delta}{10}$. On prend, pour valeur approchée de $\log\sin(\alpha+\beta)$, le nombre $n+\frac{L+\delta}{10^7}$. On procède d'une façon analogue s'il s'agit d'une tangente. S'il s'agit d'un cosinus ou d'une cotangente, il faut former, non la somme $L+\delta$, mais la différence $L-\delta$.

L'erreur commise tient : 1° à ce que l'on ne connaît de $\log\sin\alpha$ et de $\log\sin(\alpha+10)$ que des valeurs approchées ; 2° à ce que δ n'est qu'une valeur approchée de $\frac{\beta\Delta}{10}$; 3° à ce que l'égalité (1) n'est pas rigoureuse. Cette troisième cause d'erreur peut devenir, ici, aussi importante que les deux premières.

Cherchons à tenir compte de ces causes d'erreur. On a les égalités *rigoureuses*

$$\log\sin\alpha = n+\frac{L+\varepsilon}{10^7},$$

$$\log \sin(\alpha + 10) = n + \frac{L + \Delta + \varepsilon'}{10^7},$$

$$\frac{\beta\Delta}{10} = \delta + \varepsilon'',$$

les trois nombres $|\varepsilon|$, $|\varepsilon'|$, $|\varepsilon''|$ étant moindres que $\frac{1}{2}$. D'ailleurs nous démontrerons [1] que l'*on a l'égalité*

(2) $\log\sin(\alpha+\beta) - \log\sin\alpha = \frac{\beta}{10}[\log\sin(\alpha+10) - \log\sin\alpha] + \frac{\eta}{10^7}$,

avec $|\eta| < \frac{1}{2}$, *pourvu que l'arc* α, *multiple de* 10″, *surpasse* 6°. *S'il s'agit d'un cosinus, il suffit que l'arc soit moindre que* 84°. *S'il s'agit d'une tangente ou d'une cotangente, il suffit que l'arc soit compris entre* 6° *et* 84°. Supposons remplies ces conditions relatives à l'arc. Remplaçons dans l'égalité (2) $\log\sin\alpha$ et $\log\sin(\alpha+10)$ par leurs valeurs exactes, nous aurons

$$\log\sin(\alpha+\beta) = n + \frac{1}{10^7}\left[L + \varepsilon + \frac{\beta}{10}(\Delta + \varepsilon' - \varepsilon)\right] + \frac{\eta}{10^7}$$

ou

$$\log\sin(\alpha+\beta) = n + \frac{L+\delta}{10^7} + \frac{\varepsilon\left(1 - \frac{\beta}{10}\right) + \frac{\beta}{10}\varepsilon' + \varepsilon'' + \eta}{10^7}.$$

Ce dernier terme représente l'erreur commise lorsqu'on prend $\frac{L+\delta}{10^7}$ pour valeur approchée de $\log\sin(\alpha+\beta)$. Elle est, en valeur absolue, au plus égale à

$$\frac{1}{10^7}\left[|\varepsilon|\left(1 - \frac{\beta}{10}\right) + |\varepsilon'|\frac{\beta}{10} + |\varepsilon''| + |\eta|\right],$$

et par suite moindre que $\frac{3}{2 \times 10^7}$.

225. *Exemple* I. — Calculer log sin 32° 48′ 27″,6.

La table fournit, pour log sin 32° 48′ 20″, la valeur approchée $\bar{1}$,7338308. On constate que Δ est égal à 326; cette valeur est du reste inscrite à côté de la colonne des sinus. D'ailleurs on a $\beta = 7{,}6$, et par conséquent $\frac{\beta\Delta}{10} = 326 \times 0{,}76$. Comme dans

(1) Voir les numéros 270, 271 et 272.

la table des nombres, un petit tableau intitulé 326 contient les produits de 326 par $\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \ldots, \frac{9}{10}$: il nous donne

$$326 \times 0,7 = 228,2,$$
$$326 \times 0,06 = 19,56,$$

d'où

$$326 \times 0,76 = 247,76.$$

L'entier δ le plus voisin de ce produit est 248; on a donc

$$L + \delta = 7338308 + 248 = 7338556.$$

Finalement on trouve, comme valeur approchée du logarithme demandé, le nombre $\bar{1},7338556$. On dispose ainsi les calculs :

$$\begin{array}{lll} \log \sin 32^\circ 48' 20'' = \bar{1},7338308 & & (\Delta = 326) \\ \quad 7 \quad \ldots\ldots 2282 & & \\ \quad 0,6 \quad \ldots\ldots\ldots 1956 & & \\ \hline \quad \bar{1},733855576 & & \end{array}$$

$$\log \sin 32^\circ 48' 27'',6 = \bar{1},7338556.$$

Exemple II. — Calculer $\log \cos 32^\circ 48' 27'',6$. On procède d'une manière analogue, seulement on se rappelle qu'à un accroissement de l'arc correspond une diminution du logarithme. Indiquons tout de suite la disposition des calculs :

$$\begin{array}{lll} \log \cos 32^\circ 48' 20'' = \bar{1},9245450 & & (\Delta = 136) \\ \quad 7 \quad \ldots\ldots -952 & & \\ \quad 0,6 \quad \ldots\ldots -816 & & \\ \hline \quad \bar{1},924534664 & & \end{array}$$

$$\log \cos 32^\circ 48' 27'',6 = \bar{1},9245347.$$

Exemple III. — Calculer $\log \operatorname{tg} 57^\circ 17' 37'',6$.

$$\begin{array}{lll} \log \operatorname{tg} 57^\circ 17' 30'' = 0,1923338 & & (\Delta = 463) \\ \quad 7 \quad \ldots\ldots 3241 & & \\ \quad 0,6 \quad \ldots\ldots\ldots 2778 & & \\ \hline \quad 0,192368988 & & \end{array}$$

$$\log \operatorname{tg} 57^\circ 17' 37'',6 = 0,1923690.$$

On trouverait de même

$\log \operatorname{cotg} 57^\circ 17' 37'',6 = \bar{1},8076310.$

226. Inversement, supposons que l'on connaisse du log tg par exemple de l'arc x une valeur approchée $n + \frac{L'}{10^7}$, et proposons-nous de calculer l'arc x. Cherchons sur la table les deux log tg consécutifs comprenant le log tg donné; soit $n + \frac{L}{10^7}$ et $n + \frac{L + \Delta}{10^7}$ ces deux log tg, correspondant aux arcs α et $\alpha + 10$. On a :

$L' = L + \delta$, avec $0 < \delta < \Delta$; $x = \alpha + \beta$, avec $0 < \beta < 10$.

Reprenons l'égalité approchée

$$(1) \quad \log \operatorname{tg}(\alpha + \beta) - \log \operatorname{tg} \alpha = \frac{\beta}{10} [\log \operatorname{tg}(\alpha + 10) - \log \operatorname{tg} \alpha],$$

et remplaçons-y $\log \operatorname{tg} \alpha$, $\log \operatorname{tg}(\alpha + 10)$ et $\log \operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ par leurs valeurs approchées $n + \frac{L}{10^7}$, $n + \frac{L + \Delta}{10^7}$, $n + \frac{L + \delta}{10^7}$. Il vient

$$\delta = \frac{\beta}{10} \Delta, \qquad \text{d'où} \qquad \beta = \frac{10\delta}{\Delta}.$$

Mais cette égalité n'est qu'approchée : 1° parce que $n + \frac{L}{10^7}$, etc. ne sont que des valeurs approchées de log tg α, etc.; 2° parce que l'égalité (1) n'est pas rigoureuse. Dans l'égalité rigoureuse

$$(2) \begin{cases} \log \operatorname{tg}(\alpha + \beta) - \log \operatorname{tg} \alpha = \frac{\beta}{10} [\log \operatorname{tg}(\alpha + 10) - \log \operatorname{tg} \alpha] + \frac{\eta}{10^7}, \\ \qquad |\eta| < \frac{1}{2}, \end{cases}$$

remplie sous des conditions énoncées précédemment, remplaçons $\log \operatorname{tg} \alpha$ et $\log \operatorname{tg}(\alpha + 10)$ par leurs valeurs *exactes* $n + \frac{L + \varepsilon}{10^7}$ et $n + \frac{L + \Delta + \varepsilon'}{10^7}$, $\left(|\varepsilon|, |\varepsilon'| < \frac{1}{2} \right)$ et $\log \operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ par sa valeur *exacte* $n + \frac{L + \delta + \omega}{10^7}$. Il vient

$$\delta + \omega - \varepsilon = \frac{\beta}{10} (\Delta + \varepsilon' - \varepsilon) + \eta,$$

d'où

$$\beta = 10\,\frac{\delta + \omega - \varepsilon - \eta}{\Delta + \varepsilon' - \varepsilon}.$$

On tire de là

$$\beta - \frac{10\delta}{\Delta} = 10\,\frac{\Delta\omega - (\Delta - \delta)\varepsilon - \delta\varepsilon' - \Delta\eta}{\Delta(\Delta + \varepsilon' - \varepsilon)}.$$

Le second membre représente (avec la seconde pour unité) l'erreur commise en prenant $\frac{10\delta}{\Delta}$ pour valeur approchée de β. Elle est moindre que

$$10\,\frac{\Delta\,|\,\omega\,| + (\Delta - \delta)\,|\,\varepsilon\,| + \delta\,|\,\varepsilon'\,| + \Delta\,|\,\eta\,|}{\Delta(\Delta - 1)}$$

et *a fortiori* moindre que

$$10\,\frac{\Delta\,|\,\omega\,| + \frac{1}{2}(\Delta - \delta + \delta + \Delta)}{\Delta(\Delta - 1)} \qquad \text{ou} \qquad 10\,\frac{|\,\omega\,| + 1}{\Delta - 1}.$$

Cette limite supérieure de l'erreur commise dépasse certainement $\frac{1}{1000}$, car elle dépasse $\frac{10}{\Delta - 1}$, et l'inégalité

$$\frac{10}{\Delta - 1} > \frac{1}{1000}, \qquad \text{ou} \qquad \Delta < 10001$$

est certainement remplie si α est compris entre 6^0 et 84^0, attendu que la plus grande valeur de Δ est 2025.

D'après ce qui précède, il est inutile de calculer le quotient $\frac{10\delta}{\Delta}$ à $\frac{1}{1000}$ près ; on cherchera la fraction $\frac{p}{100}$ la plus voisine de $\frac{10\delta}{\Delta}$:

$$\frac{10\delta}{\Delta} = \frac{p}{100} + f, \qquad |\,f\,| < \frac{1}{200}.$$

Si l'on prend $\alpha + \frac{p}{100}$ pour valeur approchée de x, on commet une erreur qui, avec la seconde pour unité, est moindre que

$$10\,\frac{|\,\omega\,| + 1}{\Delta - 1} + \frac{1}{200}.$$

On procéderait d'une manière analogue si le logarithme donné

était un log sinus. Dans le cas du log tg, si l'on suppose $\omega = 0$. l'erreur commise est moindre que $\frac{3}{100}$ de seconde, car l'inégalité

$$\frac{10}{\Delta - 1} + \frac{1}{200} < \frac{3}{100} \quad \text{ou} \quad \frac{10}{\Delta - 1} < \frac{1}{40}, \quad \text{ou} \quad \Delta > 401$$

est toujours remplie, attendu que la plus petite valeur de Δ (dans le cas de la tangente) est 421.

Dans le cas où le logarithme donné est un log cos ou un log cotg, on met les deux logarithmes comprenant le logarithme donné sous la forme $n + \frac{L}{10^7}$ et $n + \frac{L - \Delta}{10^7}$, et le logarithme donné lui-même sous la forme $n + \frac{L - \delta}{10^7}$, puis on achève comme précédemment. Dans le cas de la cotangente, l'erreur commise est moindre que $\frac{3}{100}$ de seconde, à supposer exact le logarithme donné.

Si l'on observe que Δ_s a une petite valeur dans le voisinage de 90°, que Δ_c a une petite valeur dans le voisinage de 0°, enfin que l'on a sensiblement $\Delta_t = \Delta_s + \Delta_c$, d'où il suit que Δ_t est plus grand que Δ_s et plus grand que Δ_c, on voit : 1° qu'un arc voisin de 90° est mal déterminé par son sinus ; 2° qu'un arc voisin de 0° est mal déterminé par son cosinus ; 3° qu'un arc quelconque est mieux déterminé par sa tangente ou par sa cotangente que par son sinus ou par son cosinus.

227. *Exemple* I. — On donne $\log \operatorname{tg} x = \bar{1},8083724$, et on demande de calculer x.

Cherchons sur la table le log tg le plus voisin, par défaut, du log tg donné ; c'est $\bar{1},8083606$; il correspond à 32° 45'. On a ici

$$\delta = 118, \qquad \Delta = 463, \qquad \frac{10\delta}{\Delta} = \frac{1180}{463}.$$

Le petit tableau intitulé 463 nous montre que 1180 est compris entre 463×2 et 463×3 : donc on a $\frac{1180}{463} = 2$, à une

unité près par défaut. Reste à évaluer

$$\frac{1180}{463} - 2 = \frac{1180 - 926}{463} = \frac{254}{463}.$$

Or 254 est compris entre $463 \times 0{,}5$ et $463 \times 0{,}6$; on a

$$\frac{254}{463} - 0{,}5 = \frac{254 - 231{,}5}{463} = \frac{22{,}5}{463}.$$

Enfin 22,5 est compris entre $463 \times 0{,}04$ et $463 \times 0{,}05$ et se rapproche plus du second nombre que du premier. C'est donc 2,55 que nous prendrons pour valeur approchée de $\frac{10\delta}{\Delta}$. La valeur approchée de x sera 32°45′2″,55. Voici la disposition du calcul :

$\log \operatorname{tg} x =$	$\bar{1},8083724$	
$\log \operatorname{tg} 32°45' =$	$\bar{1},8083606$	$(\Delta = 463)$
	118	
2	926	
	254	
0,5	2315	
	225	
0,05	2315	

$x = 32°45'2'',55.$

Exemple II. — Bornons-nous à indiquer le calcul.

$\log \operatorname{cotg} x =$	$\bar{1},8084362$	
$\log \operatorname{cotg} 57°14'40'' =$	$\bar{1},8084332$	$(\Delta = 463)$
	-170	
3	-1389	
	-311	
0,6	-2778	
	-332	
0,07	-3241	

$x = 57°14'43'',67.$

EXERCICES

1. Les extrémités des arcs $\alpha + \frac{2k\pi}{m}$ sont les sommets d'un polygone régulier de m côtés.

2. k et k' étant deux entiers différents, peut-on avoir l'égalité

$$\sin \frac{k\pi}{\sqrt{7}} = \sin \frac{k'\pi}{\sqrt{7}} ?$$

3. Résoudre les équations

$$\sin x + \sin \alpha = 0, \qquad \cos x + \cos \alpha = 0;$$
$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \alpha = 0, \qquad \operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} \alpha = 0;$$
$$\sin x + \cos \alpha = 0, \qquad \operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} \alpha = 0.$$

Trouver les racines communes aux deux équations

$$\sin x + \sin \alpha = 0, \qquad \cos x + \cos \alpha = 0.$$

4. Trouver le nombre de valeurs de

$$\sin\left(\alpha + \frac{2k\pi}{m}\right), \qquad \cos\left(\alpha + \frac{2k\pi}{m}\right), \qquad \operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{2k\pi}{m}\right).$$

5. Étudier la fonction

$$y = \sin^2 x - \sin x + 1.$$

6. Étudier les deux fonctions

$$y = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}, \qquad z = \operatorname{arc\,sin} \sqrt{\frac{x-1}{2x}};$$

les comparer entre elles.

7. Combien l'équation

$$\cos^2 x - 2\lambda \cos x + 4\lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0$$

a-t-elle de racines entre 0 et 2π ?

8. Démontrer les deux égalités

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4},$$
$$\operatorname{arc\,sin} \frac{3}{5} + \operatorname{arc\,sin} \frac{4}{5} = \frac{\pi}{2}.$$

9. Résoudre l'équation

$$a \sin x + b \cos x = c,$$

en prenant comme inconnue auxiliaire $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

10. Calculer $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$: 1° connaissant $\operatorname{tg} x$; 2° connaissant $\sin x$; 3° connaissant $\cos x$; 4° connaissant à la fois $\sin x$ et $\cos x$.

11. Résoudre les équations

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0,$$
$$1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0.$$

12. Trouver la limite, pour $x = 0$, de $\frac{1 - \cos x}{x^2}$.

13. Vérifier l'identité

$$\operatorname{tg} x \equiv \operatorname{cotg} x - 2 \operatorname{cotg} 2x,$$

et en déduire la somme de la série

$$\operatorname{tg} x, \quad \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad \frac{1}{4} \operatorname{tg} \frac{x}{4}, \quad \ldots \qquad \left(x \neq \frac{k\pi}{2}\right).$$

14. Trouver la limite, pour x infini, du produit

$$P_n = \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \ldots \cos \frac{x}{2^n} \quad (x \neq 0).$$

15. On considère la suite

$$r \cos x, \; r, \; a_1, \; b_1, \; a_2, \; b_2, \; \ldots\ldots \quad (r > 0, \quad 0 < x < \pi),$$

dans laquelle chaque terme, à partir du 3°, est alternativement la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique entre les deux précédents. Calculer a_n et b_n, et chercher leurs limites pour n infini.

Application : $r = \frac{1}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$.

16. Calculer la somme de la série

$$\cos^3 x, \; -\frac{1}{3}\cos^3 3x, \; \frac{1}{9}\cos^3 9x, \; -\frac{1}{27}\cos^3 27x, \ldots, (-1)^{n-1}\frac{1}{3^{n-1}}\cos^3 3^{n-1}x, \ldots$$

On se servira de la formule

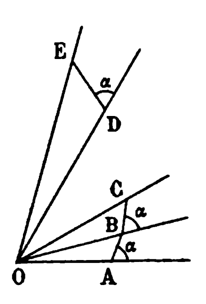
$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x.$$

17. Trouver les limites, pour $x = 0$, des fonctions

$$(\cos ax)^{\frac{1}{x}}, \qquad (1 + 2x)^{\frac{1}{\sin \frac{x}{2}}}, \qquad \left(\frac{1 + \sin x}{\cos x}\right)^{\frac{1}{x}},$$

$$(1 + \operatorname{tg} 3x)^{\operatorname{cotg} 2x}, \qquad (1 + \sin x)^{\sqrt{\frac{1}{1 - \cos x}}}.$$

18. Etant donné un angle AOE égal à φ, on le partage en n parties égales. Sur l'un des côtés OA on prend une longueur égale à l'unité et on fait en A avec la direction OA un angle égal à un autre angle donné α ; la droite ainsi tracée rencontre en B la direction OB qui fait avec OA l'angle $\frac{\varphi}{n}$; on trace la droite qui, partant de B, fait avec OB l'angle α, jusqu'à sa rencontre en C avec la direction qui fait avec OA l'angle $\frac{2\varphi}{n}$. On continue ainsi jusqu'au second côté de l'angle φ. On obtient sur ce côté une portion de droite OE dont on demande la limite quand n croît indéfiniment.



19. Sur une circonférence de rayon égal à *l'unité*, on donne un arc AB égal à φ. On partage cet arc en n parties égales et l'on mène les cordes qui joignent les points de divison voisins ; sur chacune de ces cordes comme hypoténuse, on construit un triangle rectangle isocèle ADC. Démontrer que, si n croît indéfiniment, le produit des distances des sommets de ces triangles au centre, c'est-à-dire $\overline{OD}^n$, a pour limite $e^{\frac{\varphi}{2}}$ ou $e^{-\frac{\varphi}{2}}$, suivant que les triangles sont rabattus à l'extérieur ou à l'intérieur de l'arc.

CHAPITRE VI

DES DÉRIVÉES

I. — DÉFINITIONS ET THÉORÈMES GÉNÉRAUX

228. Soit $y = f(x)$ une fonction définie dans un intervalle auquel appartient le nombre a. Si on considère les deux valeurs de x, a et $a+h$, h s'appelle l'*accroissement de la variable*, et $k=f(a+h)-f(a)$ est l'*accroissement de la fonction correspondant à l'accroissement h de la variable.* Formons le rapport

$$\frac{k}{h} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Si, h tendant vers zéro par valeurs positives, ce rapport $\frac{k}{h}$ tend vers une limite l, nous dirons que *la fonction $f(x)$ admet une dérivée à droite pour $x = a$,* et le nombre l sera *la valeur de cette dérivée à droite.* Il résulte de cette définition que, si $f(x)$ admet une dérivée à droite pour $x = a$, cette fonction est continue à droite pour $x = a$. Car posons

$$\frac{k}{h} - l = \varepsilon,$$

d'où

$$k = h(l+\varepsilon);$$

x tendant vers a par valeurs supérieures à a, ou, ce qui revient au même, h tendant vers 0 par valeurs positives, ε tend vers 0 par hypothèse; mais alors $h(l+\varepsilon) = k$ tend vers 0, autrement dit $f(x)$ tend vers $f(a)$.

De même, si, h tendant vers 0 par valeurs négatives, le rapport $\frac{k}{h}$ tend vers une limite l', nous dirons que *la fonction $f(x)$ admet*

une dérivée à gauche pour $x = a$, et le nombre l' sera la *valeur de cette dérivée à gauche*. Une telle fonction est nécessairement continue à gauche pour $x = a$.

Si enfin $f(x)$ admet, pour $x = a$, à la fois une dérivée à droite et une dérivée à gauche; si, de plus, les valeurs l, l' de ces deux dérivées sont égales, on dit que $f(x)$ *admet une dérivée pour* $x = a$, et le nombre $l = l'$ s'appelle *la valeur de cette dérivée*. Une telle fonction est à la fois continue à droite et continue à gauche pour $x = a$, c'est-à-dire est continue pour $x = a$. (1)

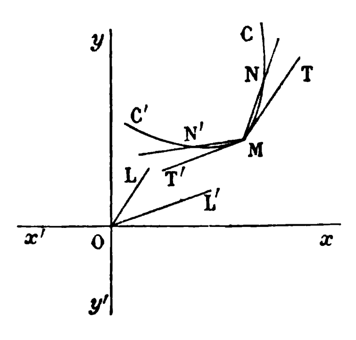
Enfin on dit qu'*une fonction* $f(x)$, *définie dans un intervalle* (a,b), *admet une dérivée dans cet intervalle*, lorsqu'elle admet : 1° une dérivée pour toute valeur de x comprise entre a et b; 2° une dérivée à droite pour $x = a$; 3° une dérivée à gauche pour $x = b$. Une telle fonction est nécessairement continue dans l'intervalle (a, b).

La valeur de cette dérivée est une nouvelle fonction de x définie dans l'intervalle (a, b); on la désigne par $f'(x)$ ou par y', si la fonction proposée a été désignée par $f(x)$ ou y.

La fonction $y' = f'(x)$ peut, à son tour, admettre une dérivée dans un intervalle (a', b') faisant partie de l'intervalle (a, b); ce sera une nouvelle fonction de x définie dans cet intervalle et que l'on représente par $f''(x)$ ou y''; on l'appelle la *dérivée seconde* ou la *dérivée du second ordre de* $f(x)$. Et ainsi de suite.

Si $f(x)$ est une fonction paire ou impaire admettant une dérivée dans l'intervalle (a, b) $(0 \leqslant a < b)$, elle admet, par cela même, une dérivée dans l'intervalle $(-b, -a)$, et la fonction $f'(x)$ est impaire ou paire, selon que $f(x)$ est paire ou impaire.

229. *Interprétation géométrique de la dérivée.* — Soit $f(x)$ une fonction continue dans un intervalle auquel appartient le nombre a. Traçons la ligne qui représente la variation de $f(x)$; soit M le point de cette ligne correspondant à $x = a$, et appelons MC, M'C' les deux parties de cette ligne qui partent de M, l'une vers la droite, l'autre vers la gauche. Supposons que, pour $x = a$, $f(x)$ admette une dérivée à droite l. Posons



$$f(a) = b, \qquad f(a + h) = b + k, \qquad h > 0.$$

(1) Cette remarque subsiste lors même que l est différent de l'.

A l'abscisse $x = a + h$ correspond le point N de MC. La droite MN a pour équation

$$y - b = \frac{k}{h}(x - a).$$

Or, h tendant vers 0 par valeurs positives, $\frac{k}{h}$ tend vers l ; donc, le point N de MC se rapprochant indéfiniment de M, la droite MN tend vers une position limite MT ayant pour équation

$$y - b = l(x - a).$$

La parallèle OL à MT menée par l'origine a pour équation $y = lx$. Si l est positif, OL est située dans les angles xOy, $x'Oy'$; si l est négatif, elle est située dans les angles $x'Oy$, xOy'. Enfin, si l est nul, OL est confondue avec Ox, et la droite MT est horizontale.

De même, si, pour $x = a$, $f(x)$ admet une dérivée à gauche l', la droite MN′ joignant le point M à un point N′ de MC′ tend vers une position limite MT′ quand N′ tend vers M, et la parallèle OL′ à MT′ a pour équation $y = l'x$.

Supposons enfin que, pour $x = a$, la fonction $f(x)$ admette une dérivée l. Alors les deux droites MT, MT′ sont confondues, et la *ligne* CMC′ *admet une tangente* TT′ *au point* M. La parallèle à cette tangente menée par l'origine a pour équation $y = lx$.

Soit $f(x)$ une fonction admettant une dérivée $f'(x)$ dans un intervalle (a, b) ; elle est continue dans cet intervalle, et si AMB est la ligne qui représente sa variation, il résulte de ce que nous venons de dire que cette ligne admet une tangente en chacun de ses points. L'équation de la tangente au point M $[c, f(c)]$ est

$$y - f(c) = f'(c)(x - c).$$

Remarque. — Soit $f(x)$ une fonction continue dans l'intervalle (a, b) et admettant une dérivée $f'(x)$ dans l'intervalle $(a + \varepsilon, b)$. Supposons que $f'(x)$ augmente indéfiniment lorsque x tend vers a par valeurs supérieures à a ; alors la droite OL parallèle à la tangente en M tend vers Oy quand le point M tend vers le point A ; autrement dit, la tangente en A est parallèle à Oy.

230. Il résulte immédiatement de la définition de la dérivée

qu'une fonction $f(x)$ constante dans un intervalle (a, b) admet une dérivée constamment nulle dans l'intervalle; que, si une fonction croissante dans un intervalle admet une dérivée dans cet intervalle, cette dérivée n'est jamais négative; que, si une fonction décroissante dans un intervalle admet une dérivée dans cet intervalle, cette dérivée n'est jamais positive.

Les réciproques de ces propositions sont loin d'être évidentes. Ainsi, soit $f(x)$ une fonction dont la dérivée $f'(x)$ est constamment positive dans un intervalle (a, b); pour qu'on pût conclure de ces propositions que $f(x)$ est croissante dans l'intervalle (a, b), il faudrait qu'on fût assuré qu'elle y varie constamment dans le même sens.

Avant d'aborder la démonstration des théorèmes qui doivent nous conduire à ces réciproques, nous ferons les remarques suivantes :

1° quel que soit x, la fonction $y = x$ admet une dérivée égale à 1 ;

2° si, dans un intervalle (a, b), une fonction $f(x)$ admet une dérivée $f'(x)$, la fonction $Af(x)$, A étant une constante, admet dans le même intervalle la dérivée $Af'(x)$;

3° si, dans un intervalle (a, b), plusieurs fonctions $f(x)$, $\varphi(x)$,... admettent des dérivées $f'(x)$, $\varphi'(x)$, ..., la fonction

$$f(x) + \varphi(x) + \ldots$$

admet, dans le même intervalle, la dérivée

$$f'(x) + \varphi'(x) + \ldots.$$

En particulier, la dérivée de $f(x) + A$, A étant une constante, est $f'(x)$.

231. Lemme du théorème de Rolle. — *Soit $f(x)$ une fonction continue dans l'intervalle (a, b) et admettant une dérivée $f'(x)$ pour toute valeur de x* COMPRISE ENTRE a ET b. *S'il existe un nombre x_0* COMPRIS ENTRE a ET b *et tel que l'on ait, pour toute valeur de x appartenant à l'intervalle (a, b),*

$$f(x) - f(x_0) \leqslant 0,$$

on a nécessairement

$$f'(x_0) = 0.$$

En effet, $f'(x_0)$ est la limite du rapport $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ quand x tend vers x_0. Or, x_0 étant compris entre a et b, x peut tendre vers x_0 par valeurs supérieures à x_0 ou par valeurs inférieures. Dans le premier cas, le rapport $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est constamment

négatif ou nul : sa limite $f'(x_0)$ ne peut donc pas être positive ; dans le second cas, ce rapport est constamment positif ou nul : sa limite $f'(x_0)$ ne peut donc pas être négative. Le nombre $f'(x_0)$ est donc nul.

On voit de même que, *s'il existe entre a et b un nombre x_1 tel que l'on ait, pour toute valeur de x appartenant à l'intervalle (a, b),*

$$f(x) - f(x_1) \geqslant 0,$$

on a nécessairement

$$f'(x_1) = 0.$$

Une conséquence de ce lemme est que, si $f(x)$ passe par un maximum ou par un minimum pour une certaine valeur de x *comprise entre a et b*, la dérivée $f'(x)$ s'annule pour cette valeur de x. Supposons, par exemple, que $f(x)$ passe par un maximum pour $x = x_0$ $(a < x_0 < b)$. Il existe alors un nombre positif ε tel que l'on ait $f(x) - f(x_0) \leqslant 0$ pour toute valeur de x appartenant à l'intervalle $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. Donc $f'(x_0)$ est égal à 0.

232. Théorème de Rolle. — *Soit $f(x)$ une fonction continue dans l'intervalle (a, b) et admettant une dérivée $f'(x)$ pour toute valeur de x comprise entre a et b; si l'on a*

$$f(a) = 0, \quad f(b) = 0,$$

il existe une valeur de x COMPRISE ENTRE *a* ET *b annulant $f'(x)$.*

Rappelons la propriété suivante (nº **161**) des fonctions continues :

Si $f(x)$ est une fonction continue dans l'intervalle (a, b), il existe deux nombres x_0, x_1, appartenant à ce même intervalle, et tels qu'on ait, pour toute valeur de x appartenant à cet intervalle,

(1) $f(x) - f(x_0) \leqslant 0$, et (2) $f(x) - f(x_1) \geqslant 0$.

Cette propriété rappelée, le théorème de Rolle résulte immédiatement du lemme précédent. Ecartons le cas où $f(x)$ serait constamment nulle dans l'intervalle (a, b), cas dans lequel la dérivée $f'(x)$ serait aussi constamment nulle. Il existe alors dans l'intervalle (a, b) un nombre ξ tel que $f(\xi)$ soit $\neq 0$. Si $f(\xi)$ est > 0, le nombre x_0 n'est égal ni à a ni à b, sans quoi l'inégalité (1) ne serait pas remplie pour $x = \xi$. Si $f(\xi)$ est < 0, c'est le nombre x_1 qui n'est égal ni à a ni à b. D'après le théorème précédent, $f'(x)$ s'annule pour $x = x_0$ dans le premier cas, pour $x = x_1$ dans le second.

233. Formule des accroissements finis. — Nous déduirons la formule connue sous ce nom d'une autre formule un peu plus générale.

Soit $f(x)$, $\varphi(x)$ deux fonctions continues dans l'intervalle (a, b) et admettant, pour toutes les valeurs de x comprises entre a et b, des dérivées $f'(x)$, $\varphi'(x)$. Supposons que $\varphi'(x)$ ne s'annule pas entre a et b; alors $\varphi(a)$ n'est pas égal à $\varphi(b)$, car si l'on avait $\varphi(a) = \varphi(b)$, la fonction $\varphi(x) - \varphi(a)$ s'annulerait pour $x = a$ et pour $x = b$, et sa dérivée $\varphi'(x)$ s'annulerait entre a et b. Cela étant, nous allons montrer qu'il existe un nombre c *compris entre* a *et* b et tel qu'on ait

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Considérons, en effet, la fonction

$$\psi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} [\varphi(x) - \varphi(a)],$$

évidemment continue dans l'intervalle (a, b). On a $\psi(a) = 0$ et $\psi(b) = 0$; de plus, $\psi(x)$ admet, pour toutes les valeurs de x comprises entre a et b, une dérivée $\psi'(x)$, et l'on a

$$\psi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} \varphi'(x).$$

D'après le théorème de Rolle, il existe *entre* a *et* b un nombre c annulant $\psi'(x)$. On a donc

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} \varphi'(c) = 0;$$

c'est la formule que nous voulions établir.

Supposons, en particulier, $\varphi(x) = x$; alors $\varphi'(x)$ est égal à 1, et l'on a la proposition suivante :

$f(x)$ étant une fonction continue dans l'intervalle (a, b) et admettant une dérivée $f'(x)$ pour toute valeur de x comprise entre a et b, il existe un nombre c COMPRIS ENTRE a ET b *et tel que l'on ait*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c),$$

ou

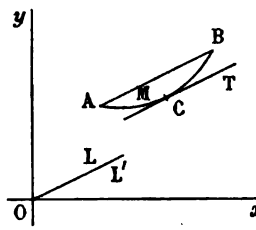
$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

C'est cette dernière formule qui est la *formule des accroissements finis*.

On peut en donner l'interprétation géométrique suivante : traçons la ligne AMB qui représente la marche de la fonction $f(x)$, x croissant de a à b, et soit C le point de cette ligne d'abscisse c. La parallèle OL menée par l'origine à la droite AB a pour équation

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x,$$

et la parallèle OL′ menée par l'origine à la tangente CT a pour équation



$$y = f'(c)x\,;$$

en vertu de l'égalité des deux nombres $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ et $f'(c)$, les deux droites OL, OL′ sont confondues : donc les deux droites AB, CT sont parallèles. Ainsi il existe sur la ligne AMB un point C tel que la tangente en ce point soit parallèle à la corde AB. Telle est l'interprétation géométrique que nous avions en vue.

234. Nous sommes maintenant en mesure de démontrer les réciproques dont nous avons parlé. Soit $f(x)$ une fonction continue dans l'intervalle (a, b) et admettant une dérivée $f'(x)$ pour toutes les valeurs de x comprises entre a et b.

1° ***Si cette dérivée $f'(x)$ est nulle pour toute valeur de x comprise entre a et b, la fonction $f(x)$ est constante dans l'intervalle (a, b).***

Car soit x_0, x_1 deux valeurs quelconques de x appartenant à l'intervalle (a, b), et soit $x_0 < x_1$. On a, d'après la formule des accroissements finis,

$$f(x_1) - f(x_0) = (x_1 - x_0)f'(x_2), \qquad x_0 < x_2 < x_1.$$

Or on a, par hypothèse, $f'(x_2)=0$, et par conséquent $f(x_0)=f(x_1)$.

Corollaire. — ***Si deux fonctions $f(x)$, $\varphi(x)$ continues dans l'intervalle (a, b), admettent, pour toute valeur de x comprise entre a et b, des dérivées égales, la différence $f(x) - \varphi(x)$ est constante dans l'intervalle.***

2° ***Si la dérivée $f'(x)$ n'est négative pour aucune valeur de x comprise entre a et b, et s'il n'existe pas d'intervalle (a', b') faisant partie de l'intervalle (a, b) dans lequel $f'(x)$ soit constamment nulle, la fonction $f(x)$ est croissante dans l'intervalle (a, b).***

Soit, en effet, x_0, x_1 deux valeurs quelconques de x appartenant à l'intervalle (a, b). Supposons $x_0 < x_1$. Nous allons montrer que l'on a $f(x_0) < f(x_1)$. La fonction $f(x)$ n'est pas constante dans l'intervalle (x_0, x_1) (sans quoi la dérivée $f'(x)$ serait nulle pour toute valeur de x comprise entre x_0 et x_1) : il existe donc entre x_0 et x_1 un nombre ξ tel que $f(\xi)$ soit $\neq f(x_0)$. Cela étant, on a

$$f(\xi) - f(x_0) = (\xi - x_0)f'(x_2), \qquad x_0 < x_2 < \xi,$$
$$f(x_1) - f(\xi) = (x_1 - \xi)f'(x_3), \qquad \xi < x_3 < x_1.$$

D'après l'hypothèse, aucun des deux nombres $f'(x_2)$, $f'(x_3)$ n'est

négatif; il y a plus : le nombre $f'(x_2)$ est positif, sans quoi il serait nul, et $f(\xi)$ serait égal à $f(x_0)$. On a donc

$$f(x_0) < f(\xi) \qquad \text{et} \qquad f(\xi) \leqslant f(x_1),$$

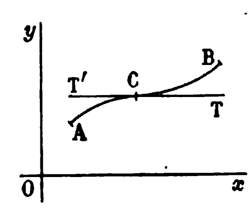
d'où

$$f(x_0) < f(x_1).$$

3° ***Si la dérivée $f'(x)$ n'est positive pour aucune valeur de x comprise entre a et b, et s'il n'existe pas d'intervalle (a', b') faisant partie de l'intervalle (a, b) dans lequel $f'(x)$ soit constamment nulle, la fonction $f(x)$ est décroissante dans l'intervalle (a, b).***

Ce théorème se démontre comme le précédent.

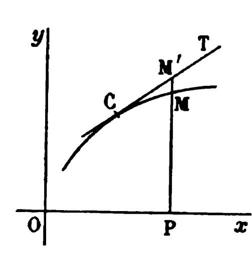
Remarque. — On a vu que si $f(x)$ passe, pour $x = c$ $(a < c < b)$, par un maximum ou par un minimum, $f'(c)$ est nul. La réciproque n'est pas vraie. Supposons $f'(c) = 0$, et supposons en outre que, pour toute valeur (autre que c) de l'intervalle (a, b), $f'(x)$ soit positive. Alors la fonction $f(x)$ est croissante dans l'intervalle (a, b), et, pour $x = c$, il n'y a ni maximum ni minimum. La ligne AB représentant la marche de la fonction ira constamment en s'élevant, mais au point C correspondant à $x = c$, la tangente TT' sera horizontale, de sorte que la portion AC de la ligne sera au-dessous de cette tangente tandis que la portion CB sera au-dessus; le point C sera un ***point d'inflexion*** de la ligne.



235. Nous terminerons ces généralités par la remarque suivante : Supposons que, dans l'intervalle (a, b), la fonction $f(x)$ admette une dérivée seconde $f''(x)$, et que, pour une valeur c de x comprise entre a et b : 1° la dérivée $f'(x)$ s'annule; 2° la dérivée seconde $f''(x)$ soit différente de 0; 3° cette dérivée seconde soit continue. Alors on peut affirmer que $f(x)$ ***passe, pour $x = c$, par un maximum ou par un minimum; si $f''(c)$ est négatif, c'est un maximum; si $f''(c)$ est positif, c'est un minimum.***

Supposons, par exemple, $f''(c) < 0$; alors, en vertu de la continuité de $f''(x)$, il existe un nombre positif ε tel que $f''(x)$ reste négative dans tout l'intervalle $(c - \varepsilon, \; c + \varepsilon)$. La fonction $f'(x)$ est donc décroissante dans l'intervalle $(c - \varepsilon, \; c + \varepsilon)$, et comme elle s'annule pour $x = c$, elle est positive pour x compris entre $c - \varepsilon$ et c, négative pour x compris entre c et $c + \varepsilon$. La fonction $f(x)$ est donc croissante dans l'intervalle $(c - \varepsilon, c)$ et décroissante dans l'intervalle $(c, c + \varepsilon)$: elle passe par un maximum pour $x = c$.

Cette remarque a une application géométrique intéressante. Supposons que, dans l'intervalle (a, b), la fonction $f(x)$ admette une dérivée seconde $f''(x)$, et que, pour une valeur c de x comprise entre a et b, cette dérivée seconde prenne une valeur différente de 0 et soit continue. Traçons la ligne $y=f(x)$; soit C le point de cette ligne d'abscisse c, M et M' les points de la ligne et de la tangente CT d'abscisse x; posons $\overline{\mathrm{M'M}} = \varphi(x)$. Nous allons montrer que, dans un petit intervalle comprenant c, $\varphi(x)$ a un signe invariable.



On a, en effet,

$$\varphi(x) = \overline{\mathrm{PM}} - \overline{\mathrm{PM'}} = f(x) - [f(c) + f'(c)(x-c)].$$

La fonction $\varphi(x)$ admet, dans l'intervalle (a, b), une dérivée première

$$\varphi'(x) = f'(x) - f'(c)$$

et une dérivée seconde

$$\varphi''(x) = f''(x).$$

On voit que, pour $x = c$, ces fonctions $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$ satisfont aux trois conditions de l'énoncé précédent : le nombre $\varphi'(c)$ est nul, le nombre $\varphi''(c) = f''(c)$ est différent de zéro, enfin la fonction $\varphi''(x)$ ou $f''(x)$ est continue pour $x = c$: donc $\varphi(x)$ passe, pour $x = c$, par un maximum si $f''(c)$ est négatif, par un minimum si $f''(c)$ est positif. Observons d'ailleurs que le nombre $\varphi(c)$ est nul : $\varphi(x)$ a donc bien un signe invariable pour les valeurs de x voisines de c. Si le nombre $f''(c)$ est négatif, la fonction $\varphi(x)$ est négative pour les valeurs de x voisines de c : le point M est donc au-dessous du point M', et la ligne est au-dessous de la tangente CT dans le voisinage du point C : c'est ce qu'on exprime en disant que, en ce point, ***elle tourne sa concavité vers les y négatifs.*** On voit de même que, si le nombre $f''(c)$ est positif, la ligne est située, dans le voisinage du point C, au-dessus de la tangente CT ; on dit que, en ce point, ***elle tourne sa concavité vers les y positifs.***

Par exemple, la fonction $y = ax^2 + bx + c$ admet la dérivée première $y' = 2ax + b$ et la dérivée seconde $y'' = 2a$: en chacun de ses points, la ligne $y = ax^2 + bx + c$ tourne sa concavité vers les y positifs, si a est positif ; vers les y négatifs, si a est négatif.

La fonction $y = a^x$ admet, comme nous le verrons, une dérivée première $y' = a^x \mathrm{L}a$ et une dérivée seconde $y'' = a^x(\mathrm{L}a)^2$: donc, quel que soit a, la ligne $y = a^x$ tourne, en chacun de ses points, sa concavité vers les y positifs.

Enfin la fonction $y = \log_a x$ admet la dérivée première $y' = \frac{1}{x\text{L}a}$ et la dérivée seconde $y'' = -\frac{1}{x^2\text{L}a}$: la ligne $y = \log_a x$ tourne donc sa concavité vers les y positifs, si a est compris entre 0 et 1 ; vers les y négatifs, si a est plus grand que 1.

II. — CALCUL DES DÉRIVÉES

236. On voit, par ce qui précède, de quelle importance il est de savoir calculer la dérivée d'une fonction. Nous allons d'abord démontrer quatre théorèmes permettant de trouver la dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient, d'une racine. Ces théorèmes sont vrais, que les fonctions dont il s'agit admettent des dérivées à droite ou des dérivées à gauche ; c'est pourquoi, dans les énoncés, nous dirons simplement que ces fonctions admettent des dérivées, sans spécifier.

237. Théorème I (*dérivée d'une somme*). — *Soit u, v, w, ... des fonctions de x admettant, pour $x = x_1$, des dérivées u'_1, v'_1, w'_1, ... La fonction*

$$y = u + v + w + \ldots$$

admet également, pour $x = x_1$, une dérivée y'_1, et l'on a

$$y'_1 = u'_1 + v'_1 + w'_1 + \ldots.$$

En effet, soit u_1, v_1, w_1, ..., y_1 les valeurs des fonctions u, v, w, ..., y pour $x = x_1$; donnons à x_1 l'accroissement Δx_1 (positif ou négatif, suivant que les fonctions sont supposées admettre des dérivées à droite ou des dérivées à gauche) ; il en résulte pour u, v, w, ..., y des accroissements Δu_1, Δv_1, Δw_1, ..., Δy_1, et l'on a

$$y_1 = u_1 + v_1 + w_1 + \ldots,$$

$$y_1 + \Delta y_1 = (u_1 + \Delta u_1) + (v_1 + \Delta v_1) + (w_1 + \Delta w_1) + \ldots,$$

d'où

$$\Delta y_1 = \Delta u_1 + \Delta v_1 + \Delta w_1 + \ldots,$$

et par suite

$$\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} = \frac{\Delta u_1}{\Delta x_1} + \frac{\Delta v_1}{\Delta x_1} + \frac{\Delta w_1}{\Delta x_1} + \ldots.$$

Δx_1 tendant vers 0, les rapports $\frac{\Delta u_1}{\Delta x_1}$, $\frac{\Delta v_1}{\Delta x_1}$, $\frac{\Delta w_1}{\Delta x_1}$, ... tendent par hypothèse vers des limites u'_1, v'_1, w'_1, ... Donc le rapport $\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}$

tend également vers une limite y'_1, et l'on a bien

$$y'_1 = u'_1 + v'_1 + w'_1 + \dots.$$

Il résulte de là que, si les fonctions $u, v, w, \dots$ admettent des dérivées $u', v', w', \dots$ dans l'intervalle (a, b), la fonction y admet une dérivée y' dans le même intervalle, et l'on a

$$y' = u' + v' + w' + \dots.$$

238. Théorème II (*dérivée d'un produit*). — *Soit $u, v, w, \dots$ des fonctions de x admettant, pour $x = x_1$, des dérivées $u'_1, v'_1, w'_1, \dots$. La fonction*

$$y = uvw\dots$$

admet également, pour $x = x_1$, une dérivée y'_1, et l'on a

$$y'_1 = u'_1 v_1 w_1 \dots + u_1 v'_1 w_1 \dots + u_1 v_1 w'_1 \dots + \dots,$$

$u_1, v_1, w_1, \dots$ *étant les valeurs des fonctions pour* $x = x_1$; autrement dit, cette dérivée est la somme des produits obtenus en multipliant successivement la dérivée de chaque facteur par le produit des valeurs des facteurs restants.

Examinons d'abord le cas de deux facteurs, u et v. A l'accroissement Δx_1 donné à la variable indépendante correspondent, pour u, v, y, des accroissements $\Delta u_1, \Delta v_1, \Delta y_1$, et l'on a

$$y_1 = u_1 v_1, \qquad y_1 + \Delta y_1 = (u_1 + \Delta u_1)(v_1 + \Delta v_1),$$

d'où

$$\Delta y_1 = \Delta u_1 \times v_1 + u_1 \times \Delta v_1 + \Delta u_1 \times \Delta v_1,$$

et par suite

$$\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} = \frac{\Delta u_1}{\Delta x_1} v_1 + u_1 \frac{\Delta v_1}{\Delta x_1} + \frac{\Delta u_1}{\Delta x_1} \Delta v_1.$$

Δx_1 tendant vers zéro, $\frac{\Delta u_1}{\Delta x_1}$ et $\frac{\Delta v_1}{\Delta x_1}$ tendent, par hypothèse, vers des limites u'_1 et v'_1; Δu_1 et Δv_1 tendent vers 0, à cause de la continuité, pour $x = x_1$, des fonctions u et v, et par suite $\frac{\Delta u_1}{\Delta x_1} \Delta v_1$ tend vers 0. Le rapport $\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}$ tend donc vers une limite y'_1, et l'on a

$$y'_1 = u'_1 v_1 + u_1 v'_1.$$

Considérons maintenant le cas de 3 facteurs : $y = uvw$. Regardons y comme un produit de 2 facteurs, uv et w; nous avons, par ce qui précède,

$$y'_1 = (uv)'_1 w_1 + u_1 v_1 w'_1;$$

d'ailleurs on a

$$(uv)'_1 = u'_1 v_1 + u_1 v'_1 :$$

donc on a

$$y'_1 = u'_1 v_1 w_1 + u_1 v'_1 w_1 + u_1 v_1 w'_1.$$

On étendrait de même la proposition à un produit de 4 facteurs, puis à un produit de 5 facteurs, et ainsi de suite.

En particulier, n étant un nombre entier positif quelconque, la fonction $y = u^n$ admet, pour $x = x_1$, une dérivée $y'_1 = nu_1^{n-1}u'_1$.

Il résulte de ce théorème que, si les fonctions $u, v, w, \dots$ admettent des dérivées $u', v', w', \dots$ dans un intervalle (a, b), la fonction

$$y = uvw\dots$$

admet, dans le même intervalle, la dérivée

$$y' = u'vw\dots + uv'w\dots + uvw'\dots + \dots,$$

et, en particulier, la fonction $y = u^n$ admet, dans ce même intervalle, la dérivée $y' = nu^{n-1}u'$.

239. Théorème III (*dérivée d'un quotient*). — *Soit u, v deux fonctions de x prenant, pour $x = x_1$, des valeurs u_1, v_1, et admettant, pour $x = x_1$, des dérivées u'_1, v'_1. Si v_1 est $\neq 0$, la fonction*

$$y = \frac{u}{v}$$

admet également, pour $x = x_1$, une dérivée y'_1, et l'on a

$$y'_1 = \frac{v_1u'_1 - u_1v'_1}{v_1^2}.$$

Car soit Δu_1, Δv_1, Δy_1 les accroissements de u, v, y correspondant à l'accroissement Δx_1 donné à la variable indépendante.

On a

$$y_1 = \frac{u_1}{v_1}, \qquad y_1 + \Delta y_1 = \frac{u_1 + \Delta u_1}{v_1 + \Delta v_1},$$

d'où

$$\Delta y_1 = \frac{v_1 \Delta u_1 - u_1 \Delta v_1}{v_1(v_1 + \Delta v_1)},$$

et par suite

$$\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} = \frac{v_1 \dfrac{\Delta u_1}{\Delta x_1} - u_1 \dfrac{\Delta v_1}{\Delta x_1}}{v_1(v_1 + \Delta v_1)};$$

Δx_1 tendant vers 0, $\dfrac{\Delta u_1}{\Delta x_1}$ et $\dfrac{\Delta v_1}{\Delta x_1}$ tendent vers u'_1 et v'_1 ; Δu_1 et Δv_1 tendent vers 0, à cause de la continuité, pour $x = x_1$, des fonctions u et v : le numérateur de la fraction qui compose le second membre de l'égalité précédente a donc pour limite $v_1u'_1 - u_1v'_1$, et le dénominateur a pour limite v_1^2. $\dfrac{\Delta y_1}{\Delta x_1}$ tend donc bien vers une limite y_1, et l'on a

$$y'_1 = \frac{v_1u'_1 - u_1v'_1}{v_1^2}.$$

De là résulte que, si u et v sont deux fonctions de x admettant des dérivées u' et v' dans un intervalle (a, b); si, de plus, la fonction v ne s'annule pas dans cet intervalle, la fonction

$$y = \frac{u}{v}$$

admet, dans le même intervalle, une dérivée

$$y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}.$$

240. Théorème IV. — (*Dérivée d'une racine*). *Soit u une fonction de x prenant, pour $x = x_1$, une valeur u_1, et admettant, pour $x = x_1$, une dérivée u'_1. Soit m un nomore entier positif. La fonction*

$$y = \sqrt[m]{u}$$

admet, pour $x = x_1$, une dérivée y'_1, et l'on a

$$y'_1 = \frac{u'_1}{m\sqrt[m]{u_1^{m-1}}},$$

sous les conditions suivantes : pour m impair, si u_1 est différent de 0; pour m pair, si u_1 est positif.

En effet, supposons d'abord u_1 positif et m quelconque. A l'accroissement Δx_1 donné à la variable indépendante correspondent les accroissements Δu_1 et Δy_1 de u et de y, et l'on a

$$y_1 = \sqrt[m]{u_1}, \qquad y_1 + \Delta y_1 = \sqrt[m]{u_1 + \Delta u_1},$$

d'où

$$\Delta y_1 = \sqrt[m]{u_1 + \Delta u_1} - \sqrt[m]{u_1} = \mathrm{A} - \mathrm{B},$$

en posant

$$\sqrt[m]{u_1 + \Delta u_1} = \mathrm{A}, \qquad \sqrt[m]{v_1} = \mathrm{B}.$$

Or, on a

$$\mathrm{A} - \mathrm{B} = \frac{\mathrm{A}^m - \mathrm{B}^m}{\mathrm{A}^{m-1} + \mathrm{A}^{m-2}\mathrm{B} + \dots + \mathrm{AB}^{m-2} + \mathrm{B}^{m-1}};$$

d'ailleurs on a

$$\mathrm{A}^m - \mathrm{B}^m = \Delta u_1.$$

On a donc

$$\Delta y_1 = \frac{\Delta u_1}{\mathrm{A}^{m-1} + \mathrm{A}^{m-2}\mathrm{B} + \dots + \mathrm{AB}^{m-2} + \mathrm{B}^{m-1}},$$

et par suite

$$\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} = \frac{\frac{\Delta u_1}{\Delta x_1}}{\mathrm{A}^{m-1} + \mathrm{A}^{m-2}\mathrm{B} + \dots + \mathrm{AB}^{m-2} + \mathrm{B}^{m-1}}.$$

Δx_1 tendant vers 0, $\frac{\Delta u_1}{\Delta x_1}$ tend vers u'_1 ; Δu_1 tend vers 0, à cause de

la continuité, pour $x = x_1$, de la fonction u, et A tend vers B : par suite chacun des $m - 1$ premiers termes du dénominateur de la fraction qui compose le second membre de l'égalité précédente tend vers $B^{m-1} = \sqrt[m]{u_1^{m-1}}$, de sorte que ce dénominateur tend vers $m\sqrt[m]{u_1^{m-1}}$. Donc enfin $\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}$ tend vers une limite y'_1, et l'on a

$$y'_1 = \frac{u'_1}{m\sqrt[m]{u_1^{m-1}}}.$$

En particulier, la fonction $y = \sqrt{u}$ admet, pour $x = x_1$, la dérivée $y_1 = \frac{u'_1}{2\sqrt{u_1}}$.

Supposons maintenant u_1 négatif et m impair. On a alors

$$y = -\sqrt[m]{-u},$$

et, d'après ce qui précède, pour $x = x_1$, y admet une dérivée

$$y'_1 = -\frac{-u'_1}{m\sqrt[m]{(-u_1)^{m-1}}} = \frac{u'_1}{m\sqrt[m]{u_1^{m-1}}}.$$

Il résulte de là que si une fonction u admet une dérivée u' dans un intervalle (a, b), la fonction

$$y = \sqrt[m]{u}$$

admet, dans cet intervalle, une dérivée

$$y' = \frac{u'}{m\sqrt[m]{u^{m-1}}}:$$

pour m impair, à condition que u ne s'annule pas ; pour m pair, pourvu que u reste positif.

En particulier, la fonction $y = \sqrt{u}$ admet la dérivée $y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$, pourvu que u reste positif.

241. Applications : 1° m étant un entier positif, la fonction x^m admet, quel que soit x, la dérivée mx^{m-1} (théorème II). *Une fonction entière*, étant une somme de termes de la forme ax^m, a étant une constante, *admet une dérivée pour toute valeur de x* (théorème I). Ainsi, soit

$$y = f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \dots + a_{m-2}x^2 + a_{m-1}x + a_m.$$

On aura, quel que soit x :

$$y' = f'(x) = ma_0x^{m-1} + (m-1)a_1x^{m-2} + (m-2)a_2x^{m-3} + \dots + 2a_{m-2}x + a_{m-1},$$

et de même :

$$
\begin{aligned}
y'' = f''(x) = m(m-1)a_0x^{m-2} &+ (m-1)(m-2)a_1x^{m-3} \\
&+ (m-2)(m-3)a_2x^{m-4} + \dots + 2.1a_{m-2},
\end{aligned}
$$

. . . .

$$
\begin{aligned}
y^{(m-2)} = f^{(m-2)}(x) = m(m-1)\dots 3a_0x^2 &+ (m-1)(m-2)\dots 2a_1x \\
&+ (m-2)(m-3)\dots 1a_2,
\end{aligned}
$$

$$y^{(m-1)} = f^{(m-1)}(x) = m(m-1)\dots 2a_0x + (m-1)(m-2)\dots 1a_1,$$

$$y^{(m)} = f^{(m)}(x) = m(m-1)\dots 1a_0.$$

Il faut remarquer que y', y'', ..., $y^{(m)}$ sont des polynomes en x dont les degrés sont respectivement $m-1$, $m-2$, ..., 0 ; les dérivées d'ordre supérieur à m sont toutes nulles, puisque $y^{(m)}$ est une constante.

Donnons à la variable indépendante x l'accroissement h ; nous aurons

$$
\begin{aligned}
f(x+h) = a_0(x+h)^m + a_1(x+h)^{m-1} &+ a_2(x+h)^{m-2} + \dots \\
&+ a_{m-2}(x+h)^2 + a_{m-1}(x+h) + a_m \ ;
\end{aligned}
$$

si maintenant nous développons

$$(x+h)^m, \quad (x+h)^{m-1}, \quad (x+h)^{m-2}, \quad \dots, \quad (x+h)^2$$

par la formule du binome, et si nous ordonnons suivant les puissances croissantes de h, il vient

$$
f(x+h) = \begin{array}{l|l l|l l|l}
a_0x^m + C_m^1 a_0x^{m-1} & h & + C_m^2 a_0x^{m-2} & h^2 & + \dots + C_m^{m-2} a_0x^2 & h^{m-2} \\
+ a_1x^{m-1} + C_{m-1}^1 a_1x^{m-2} & & + C_{m-1}^2 a_1x^{m-3} & & + \dots + C_{m-1}^{m-2} a_1x & \\
+ a_2x^{m-2} + C_{m-2}^1 a_2x^{m-3} & & + C_{m-2}^2 a_2x^{m-4} & & + \dots + C_{m-2}^{m-2} a_2 & \\
+ \dots + \dots\dots & & + \dots\dots & & + \dots\dots & \\
+ a_{m-2}x^2 + C_2^1 a_{m-2}x & & + C_2^2 a_{m-2} & & & \\
+ a_{m-1}x + C_1^1 a_{m-1} & & & & & \\
+ a_m & & & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l l}
+ C_m^{m-1} a_0x & h^{m-1} & + C_m^m a_0 h^m \\
+ C_{m-1}^{m-1} a_1 & &
\end{array}
$$

On voit immédiatement que le terme indépendant de h est $f(x)$; le coefficient de h est $f'(x)$, que l'on peut écrire $\frac{f'(x)}{1}$; le coefficient de h^2 est $\frac{f''(x)}{1.2}$; ... ; le coefficient de h^{m-2} est $\frac{f^{(m-2)}(x)}{1.2\dots(m-2)}$; le coefficient de h^{m-1} est $\frac{f^{(m-1)}(x)}{1.2\dots(m-1)}$; enfin le coefficient de h^m est $\frac{f^{(m)}(x)}{1.2\dots m}$. Ainsi, $f(x)$ étant un polynome de degré m en x,

on a, quels que soient les nombres x et h, la formule

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1}f'(x) + \frac{h^2}{1.2}f''(x) + \dots$$
$$+ \frac{h^{m-2}}{1.2\dots(m-2)}f^{(m-2)}(x) + \frac{h^{m-1}}{1.2\dots(m-1)}f^{(m-1)}(x) + \frac{h^m}{1.2\dots m}f^{(m)}(x).$$

2° *Une fonction rationnelle* $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ *admet une dérivée pour toute valeur de* x *n'annulant pas le dénominateur* (théorème III). Ainsi la fonction

$$\frac{ax+b}{a'x+b'}$$

a pour dérivée

$$\frac{(a'x+b')a-(ax+b)a'}{(a'x+b')^2} = \frac{ab'-a'b}{(a'x+b')^2} \qquad (a'x+b' \neq 0);$$

la fonction

$$\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$$

a pour dérivée

$$\frac{(a'x^2+b'x+c')(2ax+b)-(ax^2+bx+c)(2a'x+b')}{(a'x^2+b'x+c')^2}$$

ou

$$\frac{Ax^2+2Bx+C}{(a'x^2+b'x+c')^2} \qquad (a'x^2+b'x+c' \neq 0),$$

avec $\quad A = ab'-a'b, \quad B = ac'-a'c, \quad C = bc'-b'c;$

la fonction

$$\frac{1}{x^m} \quad (x \neq 0,\ m \text{ entier positif})$$

a pour dérivée

$$\frac{-mx^{m-1}}{x^{2m}} = \frac{-m}{x^{m+1}}.$$

Comme on a $\frac{1}{x^m} = x^{-m}$, il en résulte que $-\frac{m}{x^{m+1}}$ est égal à $-mx^{-m-1}$: on voit donc qu'on obtient la dérivée de x^m, pour m entier négatif, à l'aide de la même règle que pour m entier positif. Il y a avantage à appliquer cette règle, parce qu'elle donne le résultat sous sa forme la plus simple.

3° *Enfin la fonction* $\sqrt[m]{f(x)}$, $f(x)$ *étant un polynome, admet une dérivée : si* m *est impair, pour toute valeur de* x *qui n'annule pas* $f(x)$, *et, si* m *est pair, pour toute valeur de* x *rendant* $f(x)$ *positive* (théorème IV).

L.

Ainsi la fonction $\sqrt{ax^2+2bx+c}$ a pour dérivée

$$\frac{2ax+2b}{2\sqrt{ax^2+2bx+c}} = \frac{ax+b}{\sqrt{ax^2+2bx+c}} \qquad (ax^2+bx+c>0);$$

la fonction $\sqrt[m]{x}$ a pour dérivée

$$\frac{1}{m\sqrt[m]{x^{m-1}}} \left(x \begin{cases} >0, & \text{si } m \text{ est pair} \\ \neq 0, & \text{si } m \text{ est impair} \end{cases}\right).$$

242. Dérivée de la fonction exponentielle. — La fonction exponentielle $y = a^x$ admet une dérivée quel que soit x.

Car donnons à x un accroissement h, et soit k l'accroissement correspondant de y. On a

$$k = a^{x+h} - a^x = a^x(a^h - 1),$$

d'où

$$\frac{k}{h} = a^x . \frac{a^h-1}{h}.$$

Le rapport $\frac{k}{h}$ est ainsi mis sous la forme d'un produit de deux facteurs; le premier facteur, a^x, ne dépend pas de h ; nous allons montrer que le second,

$$\frac{a^h-1}{h},$$

tend vers une limite quand h tend vers 0. Pour cela, posons

$$a^h - 1 = \alpha,$$

α étant une variable nouvelle destinée à remplacer h ; quand h tend vers 0, α tend vers 0 et réciproquement. De l'égalité

$$a^h = 1 + \alpha$$

on tire

$$h\mathrm{L}a = \mathrm{L}(1+\alpha) :$$

donc on a

$$\frac{a^h-1}{h} = \frac{\alpha \mathrm{L}a}{\mathrm{L}(1+\alpha)} = \frac{\alpha}{\mathrm{L}(1+\alpha)} . \mathrm{L}a.$$

Mais nous avons vu que, α tendant vers 0, $\frac{\alpha}{\mathrm{L}(1+\alpha)}$ tend vers 1 : $\frac{a^h-1}{h}$ tend donc vers $\mathrm{L}a$. Dès lors le rapport $\frac{k}{h}$ tend vers une limite quand h tend vers 0, et cette limite est

$$y' = a^x \mathrm{L}a.$$

On a de même, quel que soit x,

$$y'' = a^x(\mathrm{L}a)^2,$$

et, d'une manière générale,

$$y^{(n)} = a^x(\mathrm{L}a)^n,$$

quel que soit l'entier positif n.

Supposons, en particulier, $a = e$; alors on a

$$y = e^x, \qquad y' = e^x, \qquad y'' = e^x, \ldots, \qquad y^{(n)} = e^x, \ldots.$$

La fonction e^x est donc égale à l'une quelconque de ses dérivées.

243. Dérivée de la fonction logarithmique. — La fonction logarithmique $y = \log_a x$ admet une dérivée pour toute valeur positive de x.

Car donnons à x un accroissement h, et soit k l'accroissement correspondant de $\log_a x$. On a, en supposant positifs x et $x+h$:

$$k = \log_a(x+h) - \log_a x = \log_a\left(1 + \frac{h}{x}\right),$$

d'où

$$\frac{k}{h} = \frac{1}{h} \log_a\left(1 + \frac{h}{x}\right).$$

Posons maintenant $\frac{h}{x} = \alpha$, α étant une variable nouvelle destinée à remplacer h; quand h tend vers 0, il en est de même de α et réciproquement. De l'égalité

$$\frac{h}{x} = \alpha$$

on tire

$$h = \alpha x:$$

on a donc

$$\frac{k}{h} = \frac{1}{\alpha x} \log_a(1+\alpha) = \frac{1}{x} \log_a\left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right].$$

α tendant vers 0, $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ tend vers e; $\log_a\left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]$ tend donc vers $\log_a e = \frac{1}{\mathrm{L}a}$. Dès lors le rapport $\frac{k}{h}$ tend vers une limite quand h tend vers 0, et cette limite est

$$y' = \frac{\log_a e}{x} = \frac{1}{x\mathrm{L}a}.$$

En particulier, la dérivée de $y = \mathrm{L}x$ est $y' = \frac{1}{x}$.

244. Règle des fonctions inverses. — Reprenons les notations employées dans le chapitre V. Soit $f(x)$ une fonction définie dans un intervalle (a, b), variant constamment dans le même sens (nous

la supposerons croissante), enfin continue dans cet intervalle. Soit $\varphi(x)$ la fonction inverse de $f(x)$, telle qu'elle a été définie dans le chapitre V. Si nous posons $f(a) = a'$, $f(b) = b'$, cette fonction $\varphi(x)$ est définie dans l'intervalle (a', b'), et nous avons démontré qu'elle est croissante et continue dans cet intervalle. Soit x'_1 un nombre quelconque appartenant à l'intervalle (a', b'); soit $\varphi(x'_1) = x_1$; par cela même $f(x_1)$ est égal à x'_1. *Si la fonction $f(x)$ admet une dérivée à droite pour $x = x_1$; si, en outre, la valeur l de cette dérivée n'est pas nulle, la fonction $\varphi(x)$ admet une dérivée à droite pour $x = x'_1$, et la valeur de cette dérivée est $\frac{1}{l}$.*

En effet, donnons à x'_1 un accroissement positif h, et soit $\varphi(x'_1 + h) = x_1 + k$. k est positif ainsi que h, et l'on a l'égalité $f(x_1 + k) = x'_1 + h$. Il s'agit de savoir ce que devient le rapport

$$\frac{\varphi(x'_1 + h) - \varphi(x'_1)}{h}$$

quand h tend vers 0. Or ce rapport, qui est égal à $\frac{k}{h}$, peut s'écrire

$$\frac{1}{\frac{h}{k}} = \frac{1}{\frac{f(x_1 + k) - f(x_1)}{k}}.$$

h tendant vers 0, k tend également vers 0, à cause de la continuité de la fonction $\varphi(x)$; par hypothèse, le rapport $\frac{f(x_1 + k) - f(x_1)}{k}$ tend vers une limite l différente de zéro : le rapport $\frac{\varphi(x'_1 + h) - \varphi(x'_1)}{h}$ tend donc vers une limite égale à $\frac{1}{l}$ [1].

On raisonnerait de même si $f(x)$ admettait une dérivée à gauche pour $x = x_1$. *Si donc $f(x)$ admet une dérivée l différente de 0 pour $x = x_1$, $\varphi(x)$ admet, pour $x = x_1$, une dérivée égale à $\frac{1}{l}$.*

On peut, au moyen de cette règle, déduire la dérivée de la fonction logarithmique de celle de la fonction exponentielle. Soit x'_1 un nombre positif quelconque, et soit $\log_a x'_1 = x_1$, ou, ce qui revient au même, $a^{x_1} = x'_1$. La fonction a^x admet, pour $x = x_1$, une dérivée égale à $a^{x_1}La$; cette dérivée n'est pas nulle : donc la fonction $\log_a x$ admet, pour $x = x'_1$, une dérivée égale à

$$\frac{1}{a^{x_1}La} = \frac{1}{x'_1 La}.$$

---

(1) Si la fonction $f(x)$ était décroissante, l'existence d'une dérivée à droite pour $f(x)$ entraînerait celle d'une dérivée à gauche pour $\varphi(x)$.

Nous retrouvons bien ainsi la dérivée de la fonction logarithmique.

245. Règle des fonctions de fonction. — Soit, comme au chapitre V, $u = \varphi(x)$ une fonction de x définie dans un intervalle (a, b) et ne prenant que des valeurs appartenant à l'intervalle (a', b'). Soit $y = f(u)$ une fonction de u définie dans l'intervalle (a', b'). Posons

$$f[\varphi(x)] = F(x).$$

$F(x)$ est une fonction de x définie dans l'intervalle (a, b). Supposons que la fonction $f(u)$ de la variable indépendante u admette une dérivée $f'(u)$ dans l'intervalle (a', b'). Supposons que la fonction $\varphi(x)$ admette une dérivée u'_1 pour une certaine valeur x_1 de l'intervalle (a, b) ; nous savons déjà que dès lors la fonction $F(x)$ est continue pour $x = x_1$; nous allons maintenant démontrer qu'*elle admet une dérivée pour* $x = x_1$, *et que la valeur de cette dérivée est*

$$f'(u_1) \times u'_1,$$

si l'on pose $\varphi(x_1) = u_1$.

Soit, en effet, $f(u_1) = y_1$, et par suite $F(x_1) = y_1$. Donnons à x_1 un accroissement h, positif ou négatif, suivant qu'il s'agit de dérivée à droite ou de dérivée à gauche, et posons

$$\varphi(x_1 + h) = u_1 + k, \qquad f(u_1 + k) = y_1 + l,$$

d'où

$$F(x_1 + h) = y_1 + l.$$

Il s'agit de voir ce que devient le rapport

$$\frac{F(x_1 + h) - F(x_1)}{h}$$

quand h tend vers 0. Or ce rapport, qui est égal à $\frac{l}{h}$, peut s'écrire

$$\frac{l}{k} \times \frac{k}{h} = \frac{f(u_1 + k) - f(u_1)}{k} \times \frac{\varphi(x_1 + h) - \varphi(x_1)}{h}.$$

h tendant vers 0, k tend également vers 0, à cause de la continuité, pour $x = x_1$, de la fonction $\varphi(x)$; dès lors le rapport $\frac{f(u_1 + k) - f(u_1)}{k}$ tend vers une limite qui est la valeur de la dérivée $f'(u)$ pour $u = u_1$; le rapport $\frac{\varphi(x_1+h) - \varphi(x_1)}{h}$ tend, par hypothèse, vers u'_1. Donc le rapport $\frac{F(x_1 + h) - F(x_1)}{h}$ tend vers une limite égale à

$$f'(u_1) \times u'_1.$$

D'après cela, si la fonction $u = \varphi(x)$ admet, dans un intervalle (α, β) faisant partie de l'intervalle (a, b), une dérivée $u' = \varphi'(x)$, la fonction $F(x)$ admet, dans ce même intervalle, une dérivée

$$F'(x) = f'(u) \times u' = f'[\varphi(x)] \times \varphi'(x).$$

Les conclusions précédentes subsistent lorsque $f(u)$ n'est définie et n'admet une dérivée que dans l'intervalle $(a' + \varepsilon, b')$ ou dans l'intervalle $(a', b' - \varepsilon)$ ou dans l'intervalle $(a' + \varepsilon, b' - \varepsilon)$, à condition que les valeurs de $\varphi(x)$ soient toutes supérieures à a' dans le premier cas, toutes inférieures à b' dans le second cas, toutes comprises entre a' et b' dans le troisième cas.

246. *Exemples :* 1° a étant un nombre positif différent de 1 et u une fonction de x définie dans l'intervalle (α, β),

$$y = a^u$$

est une fonction de x définie dans le même intervalle. Si, pour $x = x_1$, u admet une dérivée u'_1, y admet également une dérivée y'_1, et l'on a

$$y'_1 = a^{u_1}La \times u'_1,$$

u_1 étant la valeur de u pour $x = x_1$. Si la fonction u admet une dérivée u' dans un intervalle (α', β') faisant partie de l'intervalle (α, β), la fonction y admet dans le même intervalle la dérivée

$$y' = a^u La \times u'.$$

Par exemple, la fonction

$$y = e^{x^2}$$

admet, quel que soit x, la dérivée

$$y' = e^{x^2} \times 2x.$$

2° a étant un nombre positif différent de 1 et u une fonction de x définie dans l'intervalle (α, β) et ne prenant que des valeurs positives dans cet intervalle,

$$y = \log_a u$$

est une fonction de x définie dans le même intervalle. Si, pour $x = x_1$, u admet une dérivée u'_1, y admet également une dérivée

$$y'_1 = \frac{u'_1}{u_1 La},$$

u_1 étant la valeur de u pour $x = x_1$. Si la fonction u admet une dérivée u' dans un intervalle (α', β') faisant partie de l'intervalle (α, β), la fonction y admet dans le même intervalle la dérivée

$$y' = \frac{u'}{uLa}.$$

En particulier, la fonction

$$\mathrm{L}u$$

admet la dérivée

$$\frac{u'}{u}.$$

C'est pour cette raison qu'on désigne sous le nom de dérivée logarithmique d'une fonction le rapport de la dérivée de cette fonction à la fonction elle-même.

Par exemple, la fonction

$$y = \mathrm{L}[x + \sqrt{x^2 + k^2}]$$

définie, comme on le voit aisément, dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$, admet, quel que soit x, la dérivée

$$y' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + k^2}}\left[1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + k^2}}\right] = \frac{1}{\sqrt{x^2 + k^2}}.$$

3° u et v étant deux fonctions de x définies dans l'intervalle (α, β), et u ne prenant que des valeurs positives dans cet intervalle,

$$y = u^v$$

est une fonction de x définie dans le même intervalle. Si, pour $x = x_1$, u et v admettent toutes deux des dérivées u'_1 et v'_1, y admet également une dérivée. En effet, on a

$$y = e^w, \quad \text{avec} \quad w = v\mathrm{L}u.$$

Soit u_1, v_1 et w_1 les valeurs de u, v et w pour $x = x_1$. La fonction $\mathrm{L}u$ admettant, pour $x = x_1$, la dérivée $\frac{u'_1}{u_1}$, la fonction w admet, pour $x = x_1$, la dérivée

$$w'_1 = v'_1\mathrm{L}u_1 + v_1\frac{u'_1}{u_1}.$$

Donc enfin $y = e^w$ admet, pour $x = x_1$, une dérivée

$$y' = e^{w_1} \times w'_1 = u_1^{v_1}\left[v'_1\mathrm{L}u_1 + v_1\frac{u'_1}{u_1}\right].$$

Si les fonctions u et v admettent des dérivées u' et v' dans un intervalle (α', β') faisant partie de l'intervalle (α, β), y admet dans ce même intervalle la dérivée

$$y' = u^v\left[v'\mathrm{L}u + \frac{vu'}{u}\right].$$

Comme application de ce qui précède, considérons d'abord la fonction

$$y = x^m \quad (m \text{ étant une constante quelconque}),$$

définie, comme on le sait, dans l'intervalle $(+\varepsilon, +\infty)$. Elle admet

dans cet intervalle la dérivée

$$y' = mx^{m-1};$$

ainsi *l'expression trouvée dans le cas de m entier positif est applicable quel que soit m.*

Par exemple, la fonction $y = \sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}}$ a pour dérivée $y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$.

Considérons en second lieu la fonction

$$y = x^x,$$

définie également dans l'intervalle $(+\varepsilon, +\infty)$; elle admet dans cet intervalle la dérivée

$$y' = x^x(Lx + 1).$$

Considérons enfin la fonction

$$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x,$$

définie dans les deux intervalles $(-\infty, -1-\varepsilon)$, $(+\varepsilon, +\infty)$; elle admet dans chacun d'eux la dérivée

$$y' = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left[L\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right].$$

Terminons par une remarque relative au calcul de la dérivée de x^m quand m est rationnel et x négatif.

Le cas où m serait entier a déjà été examiné. Soit $m = \frac{p}{q}$, p et q étant deux entiers premiers entre eux, et q pouvant être supposé positif; nous supposerons en outre q impair, car, si q était pair, p serait impair, et $x^{\frac{p}{q}}$ n'aurait aucun sens pour x négatif. La fonction $x^{\frac{p}{q}}$ est paire ou impaire, suivant la parité de p : elle admet donc une dérivée pour x négatif; pour $x = -x_1$ $(x_1 > 0)$, cette dérivée est $\frac{p}{q}x_1^{\frac{p-q}{q}}$ ou $-\frac{p}{q}x_1^{\frac{p-q}{q}}$, suivant que la fonction est impaire ou paire, c'est-à-dire suivant que $p - q$ est pair ou impair. Dans les deux cas, cette dérivée est égale à

$$\frac{p}{q}(-x_1)^{\frac{p-q}{q}} = \frac{p}{q}x^{\frac{p-q}{q}} = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}.$$

La règle qui fournit la dérivée quand x est positif est donc encore applicable quand x est négatif.

Ainsi, par exemple, la fonction

$$y = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}},$$

définie dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$, a pour dérivée

$$y' = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}, \qquad (x \neq 0).$$

247. Généralisation. — Soit $u = \psi(x)$ une fonction de x définie dans l'intervalle (a, b) et dont toutes les valeurs appartiennent à l'intervalle (a', b'). Soit $v = \varphi(u)$ une fonction de u définie dans l'intervalle (a', b') et dont toutes les valeurs appartiennent à l'intervalle (a'', b''). Soit enfin $y = f(v)$ une fonction de v définie dans l'intervalle (a'', b''). Posons

$$f\{\varphi[\psi(x)]\} = F(x).$$

$F(x)$ est une fonction de x définie dans l'intervalle (a, b). Supposons : 1° que la fonction $\varphi(u)$ admette une dérivée $\varphi'(u)$ dans l'intervalle (a', b') ; 2° que la fonction $f(v)$ admette une dérivée $f'(v)$ dans l'intervalle (a'', b''). Soit maintenant x_1 une valeur quelconque appartenant à l'intervalle (a, b). Nous allons montrer que, si $\psi(x)$ admet une dérivée u'_1 pour $x = x_1$, la fonction $F(x)$ *admet, pour* $x = x_1$, *une dérivée dont la valeur est*

$$f'(v_1) \times \varphi'(u_1) \times u'_1,$$

avec $u_1 = \psi(x_1)$, $v_1 = \varphi(u_1)$. Pour cela, posons

$$\varphi[\psi(x)] = \Phi(x) ;$$

nous savons que $\Phi(x)$ admet une dérivée pour $x = x_1$, et que la valeur de cette dérivée est

$$v'_1 = \varphi'(u_1) \times u'_1.$$

Or on a $F(x) = f[\Phi(x)]$: donc $F(x)$ admet, pour $x = x_1$, une dérivée dont la valeur est

$$f'(v_1) \times v'_1 \qquad \text{ou} \qquad f'(v_1) \times \varphi'(u_1) \times u'_1.$$

Si donc $u = \psi(x)$ admet une dérivée $u' = \psi'(x)$ dans un intervalle (α, β) faisant partie de l'intervalle (a, b), la fonction $y = F(x)$ admet dans le même intervalle une dérivée

$$y' = f'(v) \times \varphi'(u) \times u' = f'\{\varphi[\psi(x)]\} \times \varphi'[\psi(x)] \times \psi'(x).$$

Exemples. — 1° Soit $y = a^{b^u}$, a et b étant deux nombres positifs différents de 1, et u une fonction de x définie dans l'intervalle (α, β) ; y est une fonction de x définie dans le même intervalle. Soit x_1 une valeur quelconque appartenant à cet intervalle, soit u_1 la valeur correspondante de u ; supposons que u admette, pour $x = x_1$, une dérivée u'_1. y admettra également, pour $x = x_1$, une dérivée

$$y'_1 = a^{b^{u_1}} \mathrm{L}a \times b^{u_1} \mathrm{L}b \times u'_1.$$

Si la fonction u admet une dérivée u' dans un intervalle (α', β') faisant partie de l'intervalle (α, β), la fonction y admettra dans le même intervalle la dérivée

$$y' = a^{b^u} La \times b^u Lb \times u'.$$

2° a et b étant deux nombres positifs différents de 1, et u une fonction de x définie dans l'intervalle (α, β),

$$y = \log_a (1 + b^u)$$

est une fonction de x définie dans le même intervalle. Soit x_1 une valeur appartenant à cet intervalle, et soit u_1 la valeur correspondante de u ; si u admet, pour $x = x_1$, une dérivée u'_1, y admettra également, pour $x = x_1$, une dérivée

$$y'_1 = \frac{1}{(1 + b^{u_1})La} \times b^{u_1} Lb \times u'_1.$$

Si la fonction u admet une dérivée u' dans un intervalle (α', β') faisant partie de l'intervalle (α, β), la fonction y admet, dans le même intervalle, une dérivée

$$y' = \frac{1}{(1 + b^u)La} \times b^u Lb \times u'.$$

248. Dérivées des fonctions circulaires. — Toutes ces dérivées se déduisent de celle de la fonction

$$y = \sin x.$$

Soit h l'accroissement donné à la variable x; le rapport

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{2 \sin \frac{h}{2} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)}{h} = \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)$$

tend, lorsque h tend vers 0, vers une limite y', et l'on a

$$y' = \cos x.$$

Ainsi la dérivée de $\sin x$ est $\cos x$, quel que soit x.

De là il résulte que, u étant une fonction de x admettant une dérivée u', la fonction $\sin u$ admet une dérivée égale à $\cos u \times u'$. Prenons en particulier pour u la fonction $x + \frac{\pi}{2}$; nous voyons que, quel que soit x, la fonction

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$$

admet une dérivée égale à

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x.$$

D'après cela, la fonction

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

admettra, pour toute valeur de x n'annulant pas $\cos x$, une dérivée égale à

$$\frac{\cos x \times \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x \left(x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}\right).$$

Passons maintenant aux fonctions circulaires inverses. Considérons d'abord la fonction

$$y = \operatorname{arc} \sin x,$$

définie dans l'intervalle $(-1, +1)$. Soit x'_1 un nombre *compris* entre -1 et $+1$, et soit $x_1 = \operatorname{arc} \sin x'_1$. On a

$$x'_1 = \sin x_1, \qquad \text{et} \qquad -\frac{\pi}{2} < x_1 < +\frac{\pi}{2}.$$

Pour $x = x_1$, la fonction $\sin x$ admet une dérivée *positive* $\cos x_1$: donc, pour $x = x'_1$, la fonction y admet une dérivée

$$\frac{1}{\cos x_1} = \frac{1}{\sqrt{1 - x_1'^2}}.$$

Ainsi, sous la condition $-1 < x < +1$, la fonction y admet une dérivée

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Lorsque x tend vers $+1$ ou vers -1, cette dérivée augmente indéfiniment.

Considérons en second lieu la fonction

$$y = \operatorname{arc} \cos x,$$

définie dans l'intervalle $(-1, +1)$. Soit x'_1 un nombre compris entre -1 et $+1$, et soit $x_1 = \operatorname{arc} \cos x'_1$. On a

$$x'_1 = \cos x_1, \qquad \text{et} \qquad 0 < x_1 < \pi.$$

Pour $x = x_1$, la fonction $\cos x$ admet une dérivée *négative* $-\sin x_1$: donc, pour $x = x_1'$, la fonction y admet une dérivée

$$\frac{1}{-\sin x_1} = \frac{1}{-\sqrt{1 - x_1'^2}}.$$

Ainsi, sous la condition $-1 < x < +1$, la fonction y admet une dérivée

$$y' = \frac{1}{-\sqrt{1 - x^2}}.$$

Cette dérivée augmente indéfiniment, quand x tend vers $+1$ ou vers -1.

Considérons enfin la fonction

$$y = \text{arc tg}\, x,$$

définie dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$. Soit x_1' un nombre quelconque, et soit $x_1 = \text{arc tg}\, x_1'$. On a

$$x_1' = \text{tg}\, x_1, \qquad \text{et} \qquad -\frac{\pi}{2} < x_1 < \frac{\pi}{2}.$$

Pour $x = x_1$, la fonction $\text{tg}\, x$ admet une dérivée positive $1 + \text{tg}^2 x_1$: donc, pour $x = x_1'$, la fonction y admet une dérivée

$$\frac{1}{1+\text{tg}^2 x_1} = \frac{1}{1+x_1'^2}.$$

Ainsi, quel que soit x, la fonction y admet une dérivée

$$y' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Soit u une fonction de x définie dans l'intervalle (a, b) et y admettant une dérivée u' ; les fonctions de x

$$\sin u, \quad \cos u, \quad \text{tg}\, u, \quad \text{arc sin}\, u, \quad \text{arc cos}\, u, \quad \text{arc tg}\, u$$

admettront, dans l'intervalle (a, b), les dérivées

$$\cos u \times u', \quad -\sin u \times u', \quad \frac{u'}{\cos^2 u}, \quad \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}, \quad \frac{u'}{-\sqrt{1-u^2}}, \quad \frac{u'}{1+u^2}.$$

A l'égard des fonctions arc sin u, arc cos u, il faut supposer que, pour les valeurs de x appartenant à l'intervalle (a, b), u reste compris entre -1 et $+1$.

EXERCICES

* 1. Soit y la fonction égale à $x^2 \sin \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ et à 0 pour $x = 0$. 1° Pour quelles valeurs de x est-elle continue ? 2° Pour quelles valeurs de x a-t-elle une dérivée ? 3° Pour quelles valeurs de x cette dérivée est-elle continue ?

* 2. Si un polynome $f(x)$ est divisible par $(x-a)^\alpha$, sa dérivée $f'(x)$ est divisible par $(x-a)^{\alpha-1}$.

* 3. Si on pose

$$f(x) \equiv k(x-a)^\alpha (x-b)^\beta \ldots (x-l)^\lambda,$$

k étant une constante, $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ des entiers positifs, on a

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \equiv \frac{\alpha}{x-a} + \frac{\beta}{x-b} + \cdots + \frac{\lambda}{x-l}.$$

* 4. Soit $\varphi(x) = \mathrm{L}\,\dfrac{1+x}{1-x}$ et $y = \varphi\left(\dfrac{a+x}{1+ax}\right)$. Calculer y' ; pourquoi le résultat est-il indépendant de a ?

* 5. Calculer les dérivées des fonctions $C(x)$, $S(x)$, $T(x)$ définies page 348, exercice 10.

* 6. Calculer la dérivée de la fonction

$$\operatorname{arc\,sin} 2x\sqrt{1-x^2}\,;$$

expliquer le résultat.

* 7. Calculer la dérivée de $\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$.

* 8. Calculer les dérivées des deux fonctions

$$y = \frac{1}{a^2-b^2}\left[\frac{a\sin x}{a+b\cos x} - \frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}\sin x}{b+a\cos x}\right)\right],$$

$$z = \frac{1}{a^2-b^2}\left[\frac{a\sin x}{a+b\cos x} - \frac{2b}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{a-b}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)\right],$$

et comparer les résultats.

* 9. Calculer la dérivée m^e de

$$y = e^{x\cos\theta} \times \cos(x\sin\theta).$$

* 10. Calculer la dérivée de la fonction

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{u+v}{1-uv},$$

u et v étant deux fonctions de x qui admettent des dérivées u' et v'. Expliquer le résultat.

* 11. Même question pour la fonction

$$\operatorname{arc\,sin}\left(u\sqrt{1-v^2} + v\sqrt{1-u^2}\right).$$

* 12. Soit $\varphi_p(x)$ le polynome défini page 64, exercice 4. Soit $P(x)$ un polynome quelconque de degré $p+1$. Démontrer que ce polynome $P(x)$ peut se mettre sous la forme

$$P(x) \equiv \lambda_0 + \lambda_1\varphi_0(x) + \lambda_2\varphi_1(x) + \lambda_3\varphi_2(x) + \cdots + \lambda_{p+1}\varphi_p(x),$$

$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{p+1}$ désignant des constantes convenables.

Applications : $P(x) \equiv (x+1)^{p+1}$ et $P(x) \equiv x^{p+1}$.

* 13. Quelles sont les fonctions dont la dérivée est x^m : 1° quand m est $\neq -1$; 2° quand m est égal à -1 ? Distinguer, dans cette dernière hypothèse, le cas où x est positif de celui où x est négatif.

* **14. Quelles sont les fonctions dont la dérivée est**

$$a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a^m,$$

m étant un entier positif ?

15. Déterminer un polynome $f(x)$ du 7° degré, sachant que $f(x)+1$ est divisible par $(x-1)^4$ et $f(x)-1$ par $(x+1)^4$. Étudier la variation de $f(x)$; quel est le nombre des racines de l'équation $f(x)=0$?

$\frac{1}{7}x^7 - \frac{3}{5}x^5 + x^3 - x - \frac{19}{35}$

* **16. Quelles sont les fonctions dont la dérivée est $f'(y)\times y'$, y étant une fonction connue de x ? En particulier, quelles sont les fonctions dont la dérivée est $\frac{y'}{y}$, $y^m y'$ $(m \neq -1)$?**

Exemples : Trouver les fonctions ayant pour dérivées

$$\frac{x}{x^2+a^2},\quad \operatorname{cotg} x,\quad \frac{1}{x\mathrm{L}x},\quad \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}},\quad \frac{\mathrm{L}x}{x},\quad \frac{e^x}{1+e^{2x}}.$$

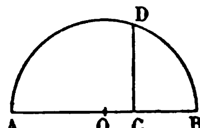
* **17. Trouver toutes les fonctions : 1° égales à leurs dérivées ; 2° opposées à leurs dérivées ; 3° égales à leurs dérivées secondes ; 4° opposées à leurs dérivées secondes.**

III. — APPLICATIONS

249. Il ne peut pas être question de donner une règle générale servant à étudier la variation de n'importe quelle fonction. Voici simplement quelques indications auxquelles il faudra toujours se conformer.

On commence par chercher dans quels intervalles la fonction est définie et continue : soit (a, b) l'un de ces intervalles. On cherche ensuite s'il n'est pas possible de reconnaître directement dans quel sens varie la fonction, x croissant de a à b ; c'est ce qui avait lieu dans les exemples simples étudiés dans les chapitres IV et V. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi, et que la fonction admette une dérivée dans l'intervalle (a, b). On s'efforce alors de subdiviser cet intervalle en d'autres intervalles tels que, dans chacun d'eux, la dérivée ait un *signe* invariable ; dans chacun de ces intervalles partiels, la fonction sera, suivant les cas, ou croissante, ou décroissante. Il ne restera plus ensuite qu'à chercher les valeurs que prend la fonction *pour les valeurs remarquables de x*, c'est-à-dire pour les valeurs de x qui limitent les intervalles ainsi formés.

250. Problème. — Sur le diamètre AB limitant un demi-cercle de rayon R on prend un point C, et on élève CD perpendiculaire sur AB. Etudier la variation de $y = AC + CD$, en prenant $AC = x$ pour variable indépendante.



On a

$$y = x + \sqrt{x(2R - x)}.$$

Il faut étudier la variation de cette fonction dans l'intervalle (0, 2R). Elle est la somme de deux termes dont l'un croît constamment et dont l'autre croît dans l'intervalle (0, R) et décroît dans l'intervalle (R, 2R). Elle est donc croissante dans l'intervalle (0, R). Pour étudier sa variation dans l'intervalle (R, 2R), formons sa dérivée

$$y' = 1 + \frac{R - x}{\sqrt{x(2R - x)}} = \frac{\sqrt{x(2R - x)} - (x - R)}{\sqrt{x(2R - x)}}$$

$$= \frac{x(2R - x) - (x - R)^2}{\sqrt{x(2R - x)}\left[\sqrt{x(2R - x)} + x - R\right]}.$$

Le dénominateur de cette fraction est positif dans l'intervalle (R, 2R). y' a donc, dans cet intervalle, le même signe que le polynome

$$f(x) \equiv x(2R - x) - (x - R)^2.$$

Or on a

$$f(0) < 0, \qquad f(R) > 0, \qquad f(2R) < 0 :$$

le trinome $f(x)$ admet donc deux racines distinctes, x_1 et x_2, vérifiant les inégalités

$$0 < x_1 < R < x_2 < 2R;$$

il est positif dans l'intervalle (R, x_2) et négatif dans l'intervalle $(x_2, 2R)$: donc la fonction y croît dans le premier intervalle et décroît dans le second.

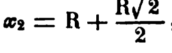
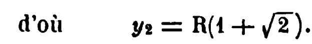
En résumé, on a le tableau suivant :

x	0		x_2		2R
y	0	croît	y_2	décroît	2R
			maximum		

L'équation $f(x) = 0$ ordonnée est

$$2x^2 - 4Rx + R^2 = 0.$$

On en tire

$$x_2 = R + \frac{R\sqrt{2}}{2}, \qquad \text{d'où} \qquad y_2 = R(1+\sqrt{2}).$$

Voici la ligne qui représente la variation de la fonction : on a pris

$$OK = OH,$$
$$FG = R,$$
$$KL = R + AF\,;$$

les tangentes en A et M sont parallèles à Ay, car y' devient infinie quand x tend vers 0 ou vers 2R ; enfin la concavité est toujours tournée vers les y négatifs, puisque

$$y'' = \frac{1}{x(2R-x)}\left[\sqrt{x(2R-x)}(-1)-(R-x)\frac{R-x}{\sqrt{x(2R-x)}}\right] = -\frac{R^2}{[x(2R-x)]^{\frac{3}{2}}}$$

est toujours négative.

251. Étude de la fonction $y = A(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-k)(x-l)$, A étant un nombre différent de 0, et $a, b, c, \ldots, k, l$ des nombres distincts que nous supposerons rangés par ordre de grandeur croissante.

Soit m le nombre des quantités $a, b, c, \ldots, k, l$. y est une fonction entière de degré m. Supposons, pour fixer les idées, $A > 0$. Quel que soit x, la fonction y admet une dérivée

$$\begin{aligned} y' = {} & A(x-b)(x-c)\ldots(x-k)(x-l) + A(x-a)(x-c)\ldots(x-k)(x-l) \\ & + \ldots + A(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-k). \end{aligned}$$

y' est un polynome de degré $m-1$ dans lequel le coefficient de x^{m-1} est mA. Il s'agit d'avoir le signe de y'. Pour cela, cherchons les racines de l'équation $y' = 0$; elle équivaut à la suivante :

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} + \ldots + \frac{1}{x-k} + \frac{1}{x-l} = 0.$$

Or nous avons reconnu dans le chapitre IV que cette équation admet $m-1$ racines $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$ comprises respectivement entre a et b, entre b et c, ..., entre k et l :

$$a < x_1 < b < x_2 < c < \ldots < k < x_{m-1} < l.$$

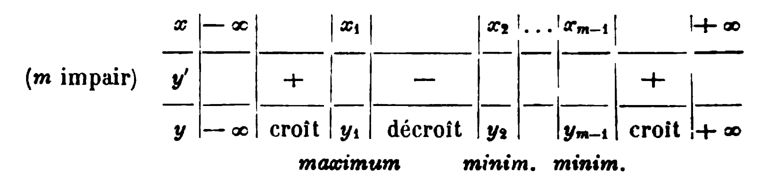
Donc on a

$$y' \equiv mA(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{m-1}).$$

Considérons les m intervalles $(-\infty, x_1)$, (x_1, x_2), ..., $(x_{m-1}, +\infty)$. Dans chacun d'eux, y' a un signe invariable. Si m est impair, y' est

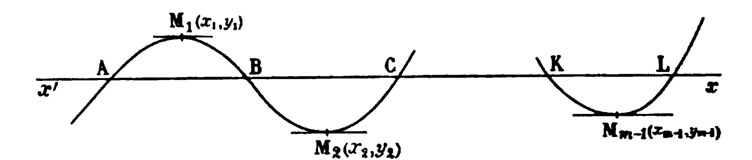
positif dans le premier intervalle (car le nombre des facteurs négatifs de y' est pair), négatif dans le second intervalle, positif dans le troisième, ..., positif dans le m^e. La fonction y est donc croissante dans les intervalles de rang impair et décroissante dans les intervalles de rang pair. Pour $x = x_p$ (p désignant l'un des nombres 1, 2, ..., $m - 1$), y passe par un maximum ou par un minimum ; c'est un maximum si p est impair, un minimum si p est pair. Enfin y augmente indéfiniment par valeurs positives ou par valeurs négatives en même temps que x.

En résumé, on a le tableau suivant, où y_p désigne la valeur de y pour $x = x_p$:



	x	$-\infty$		x_1		x_2	...	x_{m-1}		$+\infty$
(m impair)	y'		$+$		$-$				$+$	
	y	$-\infty$	croît	y_1	décroît	y_2		y_{m-1}	croît	$+\infty$
				maximum		*minim.*		*minim.*		

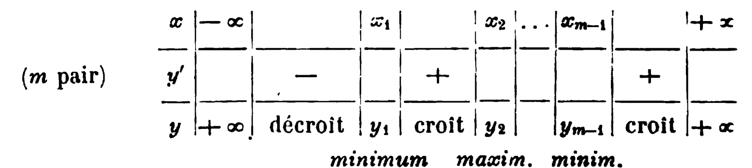
Voici la ligne représentant la marche de la fonction :



Nous n'avons pas figuré l'axe des y. Les points A, B, C, ..., K, L où la ligne coupe l'axe des x ont pour abscisses a, b, c, ..., k, l. Aux points $M_p(x_p, y_p)$, les tangentes sont horizontales. On voit que le nombre y_p est positif ou négatif, suivant que p est impair ou pair.

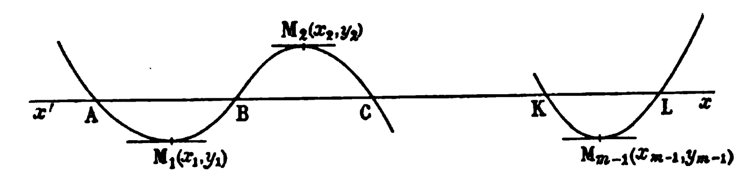
Si m est pair, la fonction y décroît dans les intervalles de rang impair et croît dans ceux de rang pair. Pour $x = x_p$, y passe par un maximum si p est pair, par un minimum si p est impair. x augmentant indéfiniment, y augmente indéfiniment par valeurs positives.

En résumé, on a le tableau suivant :



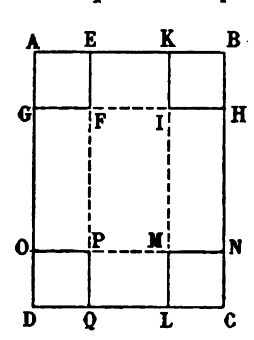
	x	$-\infty$		x_1		x_2	...	x_{m-1}		$+\infty$
(m pair)	y'		$-$		$+$				$+$	
	y	$+\infty$	décroît	y_1	croît	y_2		y_{m-1}	croît	$+\infty$
				minimum		*maxim.*		*minim.*		

Voici la ligne représentant la marche de la fonction :



Ici le nombre y_p est positif pour p pair, négatif pour p impair.

Exemple. — Aux quatre coins d'une feuille de carton rectangulaire ABCD dont les dimensions sont $AB = a$, $BC = b$ $(a < b)$, on découpe des carrés égaux AEFG, BHIK, CLMN, DOPQ. Puis on relève les bords rectangulaires EKIF, HNMI, LQPM, OGFP jusqu'à rendre leurs plans perpendiculaires au plan FIMP. On forme ainsi une boîte qui a la forme d'un parallélépipède rectangle; étudier la variation de son volume.



Appelons x le côté de l'un quelconque des quatre carrés, et y le volume de la boîte. On a

$$y = (a - 2x)(b - 2x)x$$

ou

$$y = 4(x - 0)\left(x - \frac{a}{2}\right)\left(x - \frac{b}{2}\right) \quad \left(0 < \frac{a}{2} < \frac{b}{2}\right).$$

La dérivée

$$y' = 4\left(x - \frac{a}{2}\right)\left(x - \frac{b}{2}\right) + 4x\left(x - \frac{b}{2}\right) + 4x\left(x - \frac{a}{2}\right)$$

est un trinome du second degré admettant deux racines distinctes x_1 et x_2 comprises, l'une entre 0 et $\frac{a}{2}$, l'autre entre $\frac{a}{2}$ et $\frac{b}{2}$. La fonction y de x est croissante dans l'intervalle $(-\infty, x_1)$, décroissante dans l'intervalle (x_1, x_2), croissante dans l'intervalle $(x_2, +\infty)$. Mais x ne peut évidemment varier que de 0 à $\frac{a}{2}$; le tableau indiquant la variation du volume de la boîte sera donc le suivant :

x	0		x_1		$\frac{a}{2}$
y	0	croît	y_1 *maximum*	décroît	0

L'équation $y' = 0$ ordonnée est

$$3x^2 - (a+b)x + \frac{ab}{4} = 0.$$

On en tire

$$x_1 = \frac{a + b - \sqrt{a^2 + b^2 - ab}}{6}.$$

252. Étude de la fonction $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$. Nous nous placerons dans le cas général, c'est-à-dire que nous supposerons différents de 0 les trois nombres R, a', $ab' - a'b$. Nous supposerons, en outre, pour fixer les idées, $ab' - a'b > 0$.

Pour toute valeur de x n'annulant pas le dénominateur, la fonction y admet une dérivée

$$y' = \frac{F(x)}{(a'x^2 + b'x + c')^2},$$

F(x) désignant le polynome

$$(a'x^2 + b'x + c')(2ax + b) - (ax^2 + bx + c)(2a'x + b') \equiv Ax^2 + 2Bx + C,$$

avec

$$A = ab' - a'b, \qquad B = ac' - a'c, \qquad C = bc' - b'c.$$

Cette dérivée a le même signe que F(x). Or F(x) a constamment le signe de A, c'est-à-dire le signe +, si $AC - B^2$ est positif; si $AC - B^2$ est négatif, le signe de F(x) dépend de la valeur de x. Or $AC - B^2$ est égal à R. Nous sommes ainsi amenés à distinguer deux cas : $R > 0$, $R < 0$.

1ᵉʳ Cas : $R > 0$. — On sait que, dans ce cas, $4a'c' - b'^2$ est négatif. L'équation

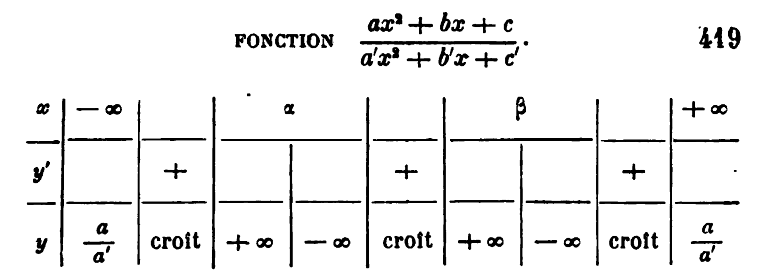
$$a'x^2 + b'x + c' = 0$$

admet donc deux racines distinctes; appelons α la plus petite de ces deux racines et β la plus grande. La fonction y est définie et continue dans les trois intervalles

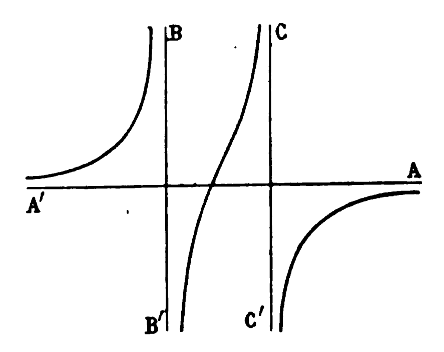
$$(-\infty,\ \alpha - \varepsilon), \qquad (\alpha + \varepsilon,\ \beta - \varepsilon), \qquad (\beta + \varepsilon,\ +\infty);$$

elle croît dans chacun d'eux, puisque sa dérivée est positive. x augmentant indéfiniment, y tend vers $\frac{a}{a'}$. x tendant vers α ou vers β, y augmente indéfiniment : car, R étant différent de 0, aucun des nombres α, β n'annule le numérateur de y. y saute de $+\infty$ à $-\infty$ quand x atteint et dépasse soit α, soit β.

Voici le tableau résumant cette étude et la ligne représentant la variation de y :



x	$-\infty$		α			β			$+\infty$
y'		$+$			$+$			$+$	
y	$\frac{a}{a'}$	croît	$+\infty$	$-\infty$	croît	$+\infty$	$-\infty$	croît	$\frac{a}{a'}$



Nous n'avons pas figuré les axes de coordonnées. La ligne admet une asymptote A'A parallèle à l'axe des x et d'ordonnée $\frac{a}{a'}$, et deux asymptotes B'B et C'C parallèles à l'axe des y et dont les abscisses sont α et β.

2e cas : $R < 0$. — Alors l'équation $F(x) = 0$ admet deux racines distinctes; appelons x_1 la plus petite de ces deux racines et x_2 la plus grande. Si x est plus petit que x_1 ou plus grand que x_2, le trinome $F(x)$ est positif; si x est compris entre x_1 et x_2, il est négatif.

Dans le cas présent, le nombre $4a'c' - b'^2$ peut être positif, négatif ou nul. Nous subdiviserons donc ce cas en trois autres :

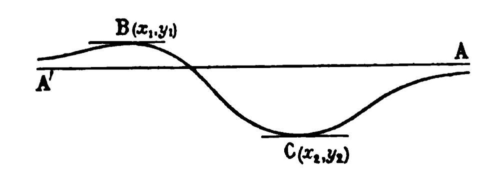
1° $4a'c' - b'^2 > 0$. Dans ce cas, le trinome $a'x^2 + b'x + c'$ ne s'annule jamais, et la fonction y est continue quel que soit x. Elle est croissante dans l'intervalle $(-\infty, x_1)$, décroissante dans l'intervalle (x_1, x_2), de nouveau croissante dans l'intervalle $(x_2, +\infty)$. x augmentant indéfiniment, y tend vers $\frac{a}{a'}$. Les valeurs de y pour $x = x_1$ et pour $x = x_2$ sont respectivement :

$$y_1 = \frac{ax_1^2 + bx_1 + c}{a'x_1^2 + b'x_1 + c'}, \qquad y_2 = \frac{ax_2^2 + bx_2 + c}{a'x_2^2 + b'x_2 + c'}.$$

En résumé, on a le tableau suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
y'		$+$		$-$		$+$	
y	$\frac{a}{a'}$	croît	y_1	décroît	y_2	croît	$\frac{a}{a'}$
			maximum		*minimum*		

Voici la ligne représentant la marche de la fonction.



Il n'y a plus qu'une asymptote A'A d'équation $y = \frac{a}{a'}$. Aux points B(x_1, y_1) et C(x_2, y_2), la tangente à la ligne est horizontale.

Remarque. — On peut donner de y_1 et de y_2 des expressions plus simples que les précédentes. L'égalité $F(x_1) = 0$ s'écrit

$$(a'x_1^2 + b'x_1 + c')(2ax_1 + b) = (ax_1^2 + bx_1 + c)(2a'x_1 + b').$$

Le nombre $a'x_1^2 + b'x_1 + c'$ est différent de 0 ; il en est de même de $2a'x_1 + b'$, car si $2a'x_1 + b'$ était nul, on aurait

$$x_1 = -\frac{b'}{2a'}, \qquad \text{et par suite} \qquad F\left(-\frac{b'}{2a'}\right) = 0,$$

ce qui est faux, car on a

$$F\left(-\frac{b'}{2a'}\right) = -\frac{1}{4a'^2}(ab' - a'b)(4a'c' - b'^2) < 0.$$

On a donc

$$\frac{ax_1^2 + bx_1 + c}{a'x_1^2 + b'x_1 + c'} = \frac{2ax_1 + b}{2a'x_1 + b'},$$

c'est-à-dire

$$y_1 = \frac{2ax_1 + b}{2a'x_1 + b'}.$$

On trouve de même

$$y_2 = \frac{2ax_2 + b}{2a'x_2 + b'}.$$

Il est évident que y_1 est plus grand que y_2. Vérifions-le par le calcul. On a

$$y_1 - y_2 = \frac{2(ab' - a'b)(x_1 - x_2)}{(2a'x_1 + b')(2a'x_2 + b')}.$$

Le numérateur de la fraction qui compose le second membre de

cette égalité est négatif. Le dénominateur a le même signe que $F\left(-\frac{b'}{2a'}\right)$, car on a

$$F(x) \equiv A(x - x_1)(x - x_2),$$

d'où

$$F\left(-\frac{b'}{2a'}\right) = \frac{A}{4a'^2}(2a'x_1 + b')(2a'x_2 + b');$$

mais $F\left(-\frac{b'}{2a'}\right)$ est négatif : on a donc bien $y_1 > y_2$.

2° $4a'c' - b'^2 < 0$. Dans ce cas, le trinome $a'x^2 + b'x + c'$ s'annule pour deux valeurs distinctes de x; appelons α la plus petite de ces deux valeurs et β la plus grande. La fonction y est continue dans les trois intervalles

$$(-\infty, \quad \alpha - \varepsilon), \qquad (\alpha + \varepsilon, \quad \beta - \varepsilon), \qquad (\beta + \varepsilon, \quad +\infty).$$

Voyons comment α et β sont placés par rapport à x_1 et x_2. A cet effet, formons le résultant R_1 des deux trinomes

$$Ax^2 + 2Bx + C \qquad \text{et} \qquad a'x^2 + b'x + c'.$$

On a

$$4R_1 = 4(AC - B^2)(4a'c' - b'^2) - (2Ac' + 2Ca' - 2Bb')^2.$$

En remplaçant A, B, C par leurs valeurs, on vérifie l'égalité

$$Ac' + Ca' - Bb' = 0,$$

de sorte qu'on a

$$R_1 = R(4a'c' - b'^2).$$

R_1 est donc positif, et par suite on a, soit les inégalités

$$x_1 < \alpha < x_2 < \beta,$$

soit les inégalités

$$\alpha < x_1 < \beta < x_2.$$

Si l'on a

$$x_1 < \alpha < x_2 < \beta \qquad \left(-\frac{B}{A} < -\frac{b'}{2a'}\right),$$

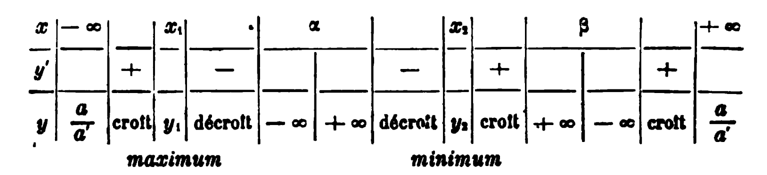
la fonction y est croissante dans les intervalles $(-\infty, x_1)$, $(x_2, \beta - \varepsilon)$, $(\beta + \varepsilon, +\infty)$ et décroissante dans les intervalles $(x_1, \alpha - \varepsilon)$, $(\alpha + \varepsilon, x_2)$. x augmentant indéfiniment, y tend vers $\frac{a}{a'}$; x tendant vers α ou vers β, y augmente indéfiniment, puisque R n'est pas nul. Lorsque x atteint et dépasse α, y saute de $-\infty$ à $+\infty$; lorsque x atteint et dépasse β, y saute de $+\infty$ à $-\infty$. Comme précédemment, le nombre $F\left(-\frac{b'}{2a'}\right)$ est différent de 0 (mais cette fois, il est positif), et par suite les valeurs y_1 et y_2 de y

pour $x = x_1$ et pour $x = x_2$ peuvent s'écrire

$$y_1 = \frac{2ax_1 + b}{2a'x_1 + b'}, \qquad y_2 = \frac{2ax_2 + b}{2a'x_2 + b'}.$$

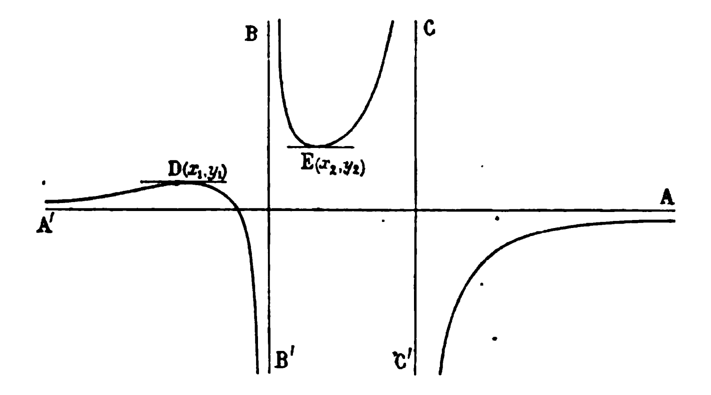
Enfin, $F\left(-\frac{b'}{2a'}\right)$ étant positif, on a, dans le cas présent, $y_1 < y_2$.

En résumé, on a le tableau suivant :



x	$-\infty$		x_1		α			x_2		β			$+\infty$
y'		+		−			−		+			+	
y	$\frac{a}{a'}$	croît	y_1	décroît	$-\infty$	$+\infty$	décroît	y_2	croît	$+\infty$	$-\infty$	croît	$\frac{a}{a'}$
			maximum					*minimum*					

Voici maintenant la ligne représentant la marche de la fonction :



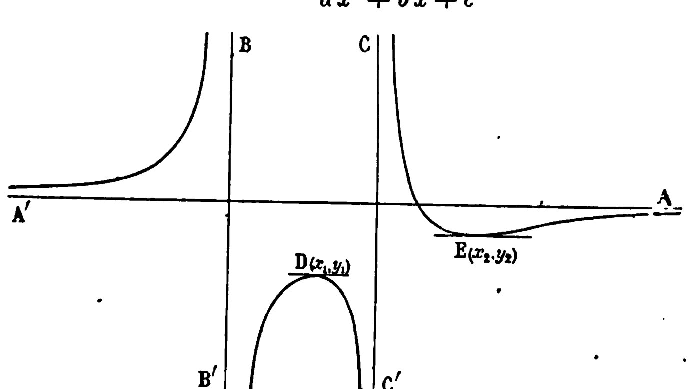
Trois asymptotes : A'A$\left(y = \frac{a}{a'}\right)$, B'B($x = \alpha$), C'C($x = \beta$). Aux points D($x_1$, y_1) et E(x_2, y_2), la tangente est horizontale.

L'hypothèse

$$\alpha < x_1 < \beta < x_2 \qquad \left(-\frac{b'}{2a'} < -\frac{B}{A}\right)$$

fournirait le tableau et la ligne que voici :

x	$-\infty$		α			x_1		β			x_2		$+\infty$
y'		+			+		−			−		+	
y	$\frac{a}{a'}$	croît	$+\infty$	$-\infty$	croît	y_1	décroît	$-\infty$	$+\infty$	décroît	y_2	croît	$\frac{a}{a'}$
						maximum					*minimum*		



3° $4a'c' - b'^2 = 0$. Alors le trinome $a'x^2 + b'x + c'$ s'annule pour une seule valeur de x, $-\frac{b'}{2a'}$. La fonction y est donc continue dans les deux intervalles $\left(-\infty, -\frac{b'}{2a'} - \varepsilon\right)$, $\left(-\frac{b'}{2a'} + \varepsilon, +\infty\right)$. Maintenant le nombre $F\left(-\frac{b'}{2a'}\right)$ est nul, de sorte que $-\frac{b'}{2a'}$ est égal à x_1 ou à x_2.

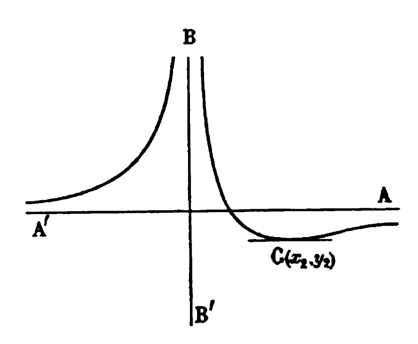
Supposons d'abord $-\frac{b'}{2a'} = x_1$ $\left(-\frac{b'}{2a'} < -\frac{B}{A}\right)$. Alors la fonction y est croissante dans les intervalles $\left(-\infty, -\frac{b'}{2a'} - \varepsilon\right)$, $(x_2, +\infty)$ et décroissante dans l'intervalle $\left(-\frac{b'}{2a'} + \varepsilon, x_2\right)$. x augmentant indéfiniment, y tend vers $\frac{a}{a'}$. x tendant vers $-\frac{b'}{2a'}$, y augmente indéfiniment, car R est différent de 0; d'ailleurs y augmente indéfiniment par valeurs positives. Enfin, pour $x = x_2$, y prend la valeur

$$y_2 = \frac{2ax_2 + b}{2a'x_2 + b'}.$$

En résumé, on a le tableau suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{b'}{2a'}$			x_2		$+\infty$
y'		$+$			$-$		$+$	
y	$\frac{a}{a'}$	croît	$+\infty$	$+\infty$	décroît	y_2 *minimum*	croît	$\frac{a}{a'}$

Voici maintenant la ligne représentant la marche de la fonction :



Les asymptotes A'A et B'B ont respectivement pour équation $y = \frac{a}{a'}$, $x = -\frac{b'}{2a'}$. Au point C (x_2, y_2), la tangente est horizontale.

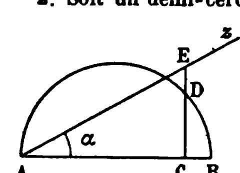
L'hypothèse $-\frac{b'}{2a'} = x_2$ $\left(-\frac{B}{A} < -\frac{b'}{2a'}\right)$ donnerait le tableau et la ligne que voici (y_1 désigne la valeur de y pour $x = x_1$; on a $y_1 = \frac{2ax_1 + b}{2a'x_1 + b'}$) :

x	$-\infty$		x_1		$-\frac{b'}{2a'}$			$+\infty$
y'		$+$		$-$			$+$	
y	$\frac{a}{a'}$	croît	y_1 *maximum*	décroît	$-\infty$	$-\infty$	croît	$\frac{a}{a'}$

EXERCICES

* 1. On construit un carré de côté x, puis, sur chaque côté de ce carré, et extérieurement au carré, un triangle isocèle dont les côtés égaux ont pour valeur p. Etudier la variation de l'aire y de l'octogone ainsi formé.

* 2. Soit un demi-cercle AB de rayon R. On mène une demi-droite Az faisant avec AB un angle égal à α; la perpendiculaire à AB menée par un point C situé sur AB rencontre le demi-cercle en D et la demi-droite en E. Etudier la variation de CD + CE, en prenant AC comme variable indépendante.



* 3. Etudier la fonction $4x^3 - 3x^4 - m$, et conclure de cette étude le nombre des racines de l'équation $4x^3 - 3x^4 - m = 0$.

* 4. Etudier la fonction $x^3 + px + q$, et conclure de cette étude le nombre des racines de l'équation $x^3 + px + q = 0$.

* 5. Etudier la fonction $x^m(a - x)^p$ ($a > 0$, m et p entiers positifs).

* 6. Etudier les fonctions

$$(x - 2)^2(x - 3)(x - 4), \qquad x(x - 1)^3(x - 2)^2.$$

* 7. Etudier la fonction $(x - a)^\alpha(x - b)^\beta(x - c)^\gamma$, où a, b, c sont trois nombres différents et α, β, γ des entiers positifs.

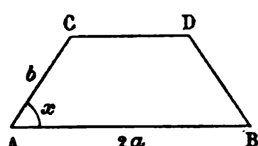
* 8. Etudier les fonctions

$$\frac{2x^2 - x + 1}{2x^2 - x - 1}, \qquad \frac{3x^2 + 1}{2x^2 + 1},$$

$$\frac{x^2 - 8x + 2}{(x - 4)^2}, \qquad \frac{4x^2 - 12x + 21}{2x^2 - 6x - 8}.$$

* 9. Soit $x'x$, $y'y$ deux axes rectangulaires qui se coupent en O. On considère un demi-cercle tangent à Oy en O et situé au-dessus de Ox, et un point A sur $x'x$ ($\overline{OA} = a$). Etudier la variation de la somme des distances d'un point du demi-cercle à Oy et au point A.

***10. Etudier la variation de l'aire y d'un trapèze isocèle dont l'une des bases est égale à $2a$ et dans lequel les deux côtés opposés non parallèles sont égaux à b, en prenant comme variable indépendante l'angle CAB. Démontrer que le trapèze maximum est inscriptible dans un demi-cercle.**



***11. Dans un triangle ABC, on connait la base a, la somme $s = b + c$ et la différence $d = b - c$ des deux autres côtés. On inscrit le cercle O dans le triangle ABC; on lui mène la tangente B'C' parallèle à BC; on inscrit le cercle O' dans le triangle AB'C'; on lui mène la tangente B''C'' parallèle à B'C', etc. Démontrer que le rapport d'un rayon au précédent est constant. Calculer, en fonction de a, s et d, la limite, pour n infini, de la somme des aires des n premiers cercles, et étudier la variation de cette limite lorsqu'on fait varier a, s et d restant fixes.**

Développement en série de la fonction exponentielle.

253. Considérons la série

$$(1) \qquad 1,\ \frac{x}{1},\ \frac{x^2}{1.2},\ \frac{x^3}{1.2.3},\ \dots,\ \frac{x^{n-1}}{1.2\dots(n-1)},\ \dots.$$

Nous allons démontrer : 1° *que cette série est convergente quel que soit x;* 2° *que sa somme est égale à e^x.*

Vérifions d'abord que, quel que soit x, l'expression $\frac{x^n}{1.2\dots n}$ tend vers zéro quand n augmente indéfiniment. Soit p le plus grand entier contenu dans la valeur absolue de x : $p \leqslant |x| < p+1$, et supposons $n > p$. On a

$$\frac{x^n}{1.2\dots n} = \frac{x^p}{1.2\dots p} \times \frac{x}{p+1} \times \frac{x}{p+2} \times \dots \times \frac{x}{n-1} \times \frac{x}{n}.$$

Tous les facteurs $\frac{x}{p+1}$, $\frac{x}{p+2}$, ..., $\frac{x}{n-1}$ sont moindres que 1 en valeur absolue; on a donc

$$\frac{|x^n|}{1.2\dots n} < \frac{|x^p|}{1.2\dots p} \times \frac{|x|}{n}.$$

n augmentant indéfiniment, le second membre de cette inégalité tend vers 0, et il en est de même *a fortiori* du premier.

Ce point établi, démontrons que la série (1) est convergente quel que soit x et que sa somme est e^x. Supposons d'abord $x < 0$. Alors la série est *alternée*, c'est-à-dire à termes alternativement

positifs et négatifs. La fonction $e^z - 1$ est négative pour $z < 0$: donc la fonction $e^z - z$, dont la précédente est la dérivée, est décroissante dans l'intervalle $(-\infty, 0)$; et comme elle est égale à 1 pour $z = 0$, elle est plus grande que 1 pour $z < 0$; autrement dit la fonction $e^z - \frac{z}{1} - 1$ est positive pour $z < 0$. Cette fonction est à son tour la dérivée de la fonction $e^z - \frac{z^2}{1.2} - \frac{z}{1}$, laquelle est par suite croissante dans l'intervalle $(-\infty, 0)$, et comme elle est égale à 1 pour $z = 0$, elle est inférieure à 1 pour $z < 0$, et l'on a

$$e^z - \frac{z^2}{1.2} - \frac{z}{1} - 1 < 0.$$

On conclut de là que la fonction $e^z - \frac{z^3}{1.2.3} - \frac{z^2}{1.2} - \frac{z}{1}$ décroît dans l'intervalle $(-\infty, 0)$, et que l'on a, pour toute valeur négative de z, l'inégalité

$$e^z - \frac{z^3}{1.2.3} - \frac{z^2}{1.2} - \frac{z}{1} - 1 > 0.$$

Et ainsi de suite. Dans ces inégalités, faisons $z = x$; elles deviennent, S_n étant la somme des n premiers termes de la série (1) :

$$e^x > S_2, \qquad e^x < S_3, \qquad e^x > S_4, \qquad \ldots.$$

Ainsi le nombre e^x est inférieur ou supérieur à S_n, suivant que n est impair ou pair. Donc, quel que soit n, les trois nombres S_n, e^x, S_{n+1} sont rangés par ordre de grandeur, et le rapport $\frac{e^x - S_n}{S_{n+1} - S_n}$ est compris entre 0 et 1. Or $S_{n+1} - S_n$ est le $(n+1)^e$ terme u_{n+1} de la série (1); on a donc

$$| e^x - S_n | < | u_{n+1} |;$$

lorsque n augmente indéfiniment, u_{n+1} tend vers zéro, et par suite S_n tend vers une limite égale à e^x. C'est ce qu'il fallait démontrer. Le raisonnement suivi montre en outre que S_n tend vers sa limite par valeurs alternativement supérieures et inférieures à e^x.

254. Supposons maintenant $x > 0$. Alors la série (1) a tous ses termes positifs. La fonction $e^z - 1$ est positive en même temps que z; par suite la fonction $e^z - \frac{z}{1}$ est croissante dans l'intervalle $(0, +\infty)$, et, sous la condition $z>0$, on a $e^z - \frac{z}{1} - 1 > 0$. On conclut de là que la fonction $e^z - \frac{z^2}{1.2} - \frac{z}{1}$ est également croissante dans l'intervalle $(0, +\infty)$, et que l'on a, pour $z > 0$,

l'inégalité $e^z - \frac{z^2}{1.2} - \frac{z}{1} - 1 > 0$. Et ainsi de suite. Pour $z = x$, ces inégalités deviennent :

$$e^x > S_2, \qquad e^x > S_3, \qquad \ldots.$$

Ainsi, quel que soit n, on a $e^x > S_n$. Ceci nous montre déjà que la série (1) est convergente et que sa somme est au plus égale à e^x.

Maintenant, la fonction e^z étant croissante, on a, pour toutes les valeurs de z inférieures à x, l'inégalité $e^z - e^x < 0$. Or $e^z - e^x$ est la dérivée de la fonction $e^z - \frac{z}{1} e^x$: cette dernière est donc décroissante dans l'intervalle $(-\infty, x)$, et, comme elle est égale à 1 pour $z = 0$, on a, sous la condition $0 < z \leqslant x$, l'inégalité $e^z - \frac{z}{1} e^x < 1$, ou $e^z - \frac{z}{1} e^x - 1 < 0$. La fonction $e^z - \frac{z}{1} e^x - 1$ est à son tour la dérivée de la fonction $e^z - \frac{z^2}{1.2} e^x - \frac{z}{1}$: cette dernière est donc décroissante dans l'intervalle $(0, x)$; comme elle est égale à 1 pour $z = 0$, on a, sous la condition $0 < z \leqslant x$, l'inégalité

$$e^z - \frac{z^2}{1.2} e^x - \frac{z}{1} < 1, \qquad \text{ou} \qquad e^z - \frac{z^2}{1.2} e^x - \frac{z}{1} - 1 < 0.$$

On démontrera de même que l'on a, sous la même condition, l'inégalité

$$e^z - \frac{z^3}{1.2.3} e^x - \frac{z^2}{1.2} - \frac{z}{1} - 1 < 0,$$

et ainsi de suite. Si on pose d'une manière générale

$$1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \cdots + \frac{z^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} = \varphi_n(z),$$

on a, quel que soit n, sous la condition $0 < z \leqslant x$:

$$e^z < \varphi_n(z) + \frac{z^n}{1.2.3\ldots n} e^x.$$

Pour $z = x$, cette inégalité devient

$$e^x < S_n + u_{n+1} e^x.$$

Ainsi, quel que soit n, on a

$$S_n < e^x < S_n + u_{n+1} e^x,$$

ou, ce qui revient au même,

$$0 < e^x - S_n < u_{n+1} e^x.$$

n augmentant indéfiniment, $u_{n+1} e^x$ tend vers zéro, et par suite S_n tend vers une limite égale à e^x.

Ainsi, que x soit positif ou négatif, la série (1) est convergente et a pour somme e^x.

255. Il est dès lors facile de trouver une série dont les termes dépendent de x, convergente quel que soit x, et dont la somme soit a^x (a étant un nombre positif quelconque différent de 1). Il suffit de poser $a^x = e^t$, d'où $t = x\mathrm{L}a$. La série

$$1, \quad \frac{x\mathrm{L}a}{1}, \quad \frac{(x\mathrm{L}a)^2}{1.2}, \quad \frac{(x\mathrm{L}a)^3}{1.2.3}, \quad \ldots, \quad \frac{(x\mathrm{L}a)^n}{1.2.3\ldots n}, \quad \ldots$$

répond à la question.

256. Le développement en série de la fonction exponentielle sert souvent à résoudre des problèmes tels que celui-ci : une fonction $f(x)$ est définie dans un intervalle ayant pour limite inférieure $a + \varepsilon$ (ou pour limite supérieure $a - \varepsilon$); que devient cette fonction lorsque x tend vers a? Voici un problème de ce genre :

La fonction $y = \frac{a^x}{x^n}$, où n est une constante différente de zéro, et a une constante positive différente de 1, est définie dans l'intervalle $(+\varepsilon, +\infty)$. Que devient cette fonction, x tendant vers 0 ou augmentant indéfiniment par valeurs positives?

x tendant vers 0 (par valeurs positives), a^x tend vers 1, et x^n tend vers 0 ou augmente indéfiniment suivant que n est positif ou négatif : y augmente donc indéfiniment si n est positif et tend vers 0 si n est négatif.

Nous allons maintenant démontrer que, *x augmentant indéfiniment, $\frac{a^x}{x^n}$ tend vers 0 si a est compris entre 0 et 1 et augmente indéfiniment si a est supérieur à 1.*

Supposons d'abord $a > 1$. Alors a^x augmente indéfiniment quand x augmente indéfiniment par valeurs positives. Si n est négatif, x^n tend vers 0; par suite $\frac{a^x}{x^n}$ augmente indéfiniment. Si n est positif, x^n augmente indéfiniment comme a^x, de sorte qu'on ne voit pas tout de suite ce que devient $\frac{a^x}{x^n}$. Appelons p un entier quelconque supérieur à n ; tous les termes de la série ayant a^x pour somme étant positifs, on a

$$a^x > \frac{x^p(\mathrm{L}a)^p}{1.2\ldots p},$$

d'où

$$\frac{a^x}{x^n} > \frac{x^{p-n}(\mathrm{L}a)^p}{1.2\ldots p}.$$

Le second membre de cette inégalité augmente indéfiniment par valeurs positives en même temps que x, et il en est de même *a fortiori* du premier.

Si maintenant a est compris entre 0 et 1, a^x tend vers 0 quand x augmente indéfiniment par valeurs positives. Si n est positif, x^n augmente indéfiniment; par suite y tend vers 0. Si n est négatif, appelons n' sa valeur absolue; on a, en désignant par b l'inverse de a:

$$y = \frac{a^x}{x^n} = \frac{x^{n'}}{b^x}.$$

Or nous avons vu que $\frac{b^x}{x^{n'}}$ augmente indéfiniment en même temps que x : donc y tend vers 0.

Développements en série des fonctions sin x et cos x.

257. Considérons les deux séries, l'une et l'autre alternée :

$$(1) \quad 1, -\frac{x^2}{1.2}, +\frac{x^4}{1.2.3.4}, -\frac{x^6}{1.2.3.4.5.6}, \ldots, (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{1.2\ldots(2n-2)}, \ldots$$

$$(2) \quad \frac{x}{1}, -\frac{x^3}{1.2.3}, +\frac{x^5}{1.2.3.4.5}, -\frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7}, \ldots, (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{1.2\ldots(2n-1)}, \ldots$$

Nous allons démontrer : 1° *qu'elles sont convergentes quel que soit* x; 2° *qu'elles ont pour somme, la première* cos x, *la seconde* sin x. Nous nous servirons de ce fait que, quel que soit x, leurs $n^{ièmes}$ termes u_n et v_n tendent vers 0 quand n augmente indéfiniment.

Supposons $x > 0$. La fonction $1 - \cos z$ n'est jamais négative et n'est nulle que pour $z = 2k\pi$: donc la fonction $z - \sin z$, dont la précédente est la dérivée, est croissante dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$, et comme elle est nulle pour $z = 0$, elle est positive pour $z > 0$. Cette fonction est à son tour la dérivée de $\frac{z^2}{1.2} + \cos z$, laquelle est par suite croissante dans l'intervalle $(0, +\infty)$; comme elle est égale à 1 pour $z = 0$, elle est plus grande que 1 pour $z > 0$, et l'on a

$$\cos z - 1 + \frac{z^2}{1.2} > 0.$$

On conclut de là que la fonction $\sin z - \frac{z}{1} + \frac{z^3}{1.2.3}$ croît dans

l'intervalle $(0, +\infty)$, et que l'on a, pour $z > 0$, l'inégalité

$$\sin z - \frac{z}{1} + \frac{z^3}{1.2.3} > 0.$$

En reprenant le même raisonnement, on démontre, toujours sous la condition $z > 0$, l'inégalité

$$1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \cos z > 0,$$

puis l'inégalité

$$\frac{z}{1} - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} - \sin z > 0,$$

et ainsi de suite. Écrivons ces inégalités pour $z = x$, en appelant S_n la somme des n premiers termes de la série (1) et Σ_n la somme des n premiers termes de la série (2) :

$$\cos x - S_2 > 0, \qquad \sin x - \Sigma_2 > 0,$$
$$S_3 - \cos x > 0, \qquad \Sigma_3 - \sin x > 0,$$
$$\cos x - S_4 > 0, \qquad \sin x - \Sigma_4 > 0,$$

etc. Ainsi $\cos x$ est inférieur ou supérieur à S_n, suivant que n est impair ou pair. De même, $\sin x$ est inférieur à Σ_n pour n impair, supérieur à Σ_n pour n pair. Les deux rapports

$$\frac{\cos x - S_n}{S_{n+1} - S_n} \quad \text{et} \quad \frac{\sin x - \Sigma_n}{\Sigma_{n+1} - \Sigma_n}$$

sont donc compris entre 0 et 1, et l'on a

$$|\cos x - S_n| < |u_{n+1}|,$$
$$|\sin x - \Sigma_n| < |v_{n+1}|.$$

Ces inégalités, établies pour toute valeur positive de x, subsistent, comme on le voit aisément, lorsque x est négatif. Lorsque n augmente indéfiniment, u_{n+1} et v_{n+1} tendent vers zéro ; par suite S_n tend vers $\cos x$ et Σ_n vers $\sin x$. En outre, chacune de ces sommes tend vers sa limite par valeurs alternativement supérieures et inférieures à cette limite.

Développement en série de la fonction logarithmique.

258. Considérons la série

(1) $$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n, \quad \ldots,$$

avec

$$u_1 = \frac{x}{1}, \qquad u_2 = -\frac{x^2}{2}, \qquad \ldots, \qquad u_n = (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}, \qquad \ldots.$$

Nous allons démontrer *sous la condition* $-1 < x \leqslant +1$: 1° *que cette série est convergente ;* 2° *que sa somme est* $L(1+x)$.

Remarquons d'abord que, sous la condition $|x| \leqslant 1$, le terme général u_n tend vers 0 quand n augmente indéfiniment. Car u_n est en valeur absolue inférieur ou égal à $\frac{1}{n}$, qui tend vers 0.

Désignons par S_n la somme des n premiers termes de la série (1), et par $\varphi_n(z)$ le polynome obtenu en remplaçant, dans S_n, x par z :

$$\varphi_n(z) = \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}.$$

Supposons d'abord $x > 0$. Alors la série (1) est alternée. Le polynome

$$\varphi_n(z) = \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}$$

a pour dérivée

$$\varphi'_n(z) = 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots + (-1)^{n-1}z^{n-1} = \frac{(-1)^n z^n - 1}{-z-1} \qquad (z \neq -1).$$

On a donc

$$\frac{1}{z+1} - \varphi'_n(z) = (-1)^n \frac{z^n}{z+1}.$$

z étant supposé > -1, $\frac{1}{z+1} - \varphi'_n(z)$ est la dérivée de la fonction $y = L(1+z) - \varphi_n(z)$. Si z est positif, cette dérivée est positive pour n pair, négative pour n impair. Donc, pour n pair, la fonction y est croissante dans l'intervalle $(0, +\infty)$, et, comme elle est nulle pour $z = 0$, elle est positive pour $z > 0$. Si au contraire n est impair, la fonction y est décroissante dans l'intervalle $(0, +\infty)$, et par suite négative pour $z > 0$. En appliquant ces résultats à $z = x$, et remarquant que $\varphi_n(x)$ est égal à S_n, on voit que l'on a : pour n pair, $L(1+x) > S_n$; pour n impair, $L(1+x) < S_n$. Par suite, quel que soit n, les trois nombres S_n, $L(1+x)$, S_{n+1} sont rangés par ordre de grandeur, et le rapport

$$\frac{L(1+x) - S_n}{S_{n+1} - S_n}$$

est compris entre 0 et 1. On a donc, pour $x > 0$,

$$|L(1+x) - S_n| < |u_{n+1}|.$$

Supposons maintenant $0 < x \leqslant +1$; alors, n augmentant indéfiniment, u_{n+1} tend vers zéro, et par suite S_n a pour limite $L(1+x)$. De plus, S_n tend vers sa limite par valeurs alternativement supérieures et inférieures à cette limite.

En particulier, la série

$$\frac{1}{1}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots.$$

a pour somme L2.

259. Supposons en second lieu $-1 < x < 0$. Alors tous les termes de la série (1) sont négatifs. On a, comme on sait,

$$\frac{1}{1+z} - \varphi_n'(z) = \frac{(-z)^n}{1+z} \quad (z \neq -1).$$

La fonction $y = L(1+z) - \varphi_n(z)$, définie dans l'intervalle $(-1+\varepsilon, +\infty)$, a donc, pour $z < 0$, une dérivée positive quel que soit n; donc, quel que soit n, la fonction y est croissante dans l'intervalle $(-1+\varepsilon, 0)$; comme elle est nulle pour $z = 0$, elle est négative pour $z < 0$, et l'on a, sous la condition $-1 < z < 0$:

$$L(1+z) - \varphi_n(z) < 0.$$

Pour $z = x$, cette inégalité devient

$$S_n > L(1+x).$$

Or S_n décroît quand n croît : donc S_n tend vers une limite au moins égale à $L(1+x)$.

Maintenant, la fonction $\frac{1}{1+z}$ étant décroissante dans l'intervalle $(-1+\varepsilon, +\infty)$, on a, sous la condition $z > x$, l'inégalité $\frac{1}{1+z} < \frac{1}{1+x}$, d'où l'on conclut, en supposant en outre $z < 0$:

$$\frac{(-z)^n}{1+z} < \frac{(-z)^n}{1+x}, \qquad \text{ou} \qquad y' - (-1)^n \frac{z^n}{1+x} < 0.$$

Or $y' - (-1)^n \frac{z^n}{1+x}$ est la dérivée de la fonction

$$y - (-1)^n \frac{z^{n+1}}{(n+1)(1+x)}:$$

cette fonction est donc décroissante dans l'intervalle $(x, 0)$, et, comme elle est nulle pour $z = 0$, on a, sous la condition $x \leqslant z < 0$, l'inégalité

$$y - \frac{(-1)^n z^{n+1}}{(n+1)(1+x)} > 0.$$

Pour $z = x$, cette inégalité devient

$$L(1+x) > S_n + \frac{u_{n+1}}{1+x}.$$

Ainsi, quel que soit n, on a

$$S_n > L(1+x) > S_n + \frac{u_{n+1}}{1+x},$$

et par suite

$$0 > L(1+x) - S_n > \frac{u_{n+1}}{1+x},$$

$$0 < S_n - L(1+x) < \frac{-u_{n+1}}{1+x};$$

n augmentant indéfiniment, $\frac{-u_{n+1}}{1+x}$ tend vers zéro, et par suite S_n tend vers $L(1+x)$.

Ainsi, pour $-1 < x \leqslant +1$, la série (1) est convergente et a pour somme $L(1+x)$.

260. Nous pouvons maintenant expliquer comment on est parvenu à calculer d'abord les logarithmes népériens, puis les logarithmes vulgaires des différents nombres entiers.

Considérons les deux séries

$$\frac{x}{1},\ -\frac{x^2}{2},\ +\frac{x^3}{3},\ -\frac{x^4}{4},\ \ldots,$$

$$\frac{x}{1},\ +\frac{x^2}{2},\ +\frac{x^3}{3},\ +\frac{x^4}{4},\ \ldots,$$

toutes deux convergentes sous la condition $-1 < x < +1$, et ayant pour sommes respectives $L(1+x)$ et $-L(1-x)$; la série

$$(1) \qquad \frac{2x}{1},\ \frac{2x^3}{3},\ \frac{2x^5}{5},\ \frac{2x^7}{7},\ \ldots,$$

que l'on obtient en additionnant les termes de même rang des deux séries précédentes, est convergente sous la même condition

$$-1 < x < +1$$

et a pour somme

$$L(1+x) - L(1-x) \qquad \text{ou} \qquad L\frac{1+x}{1-x}.$$

Cela posé, soit n un nombre entier positif quelconque ; posons

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{n+1}{n};$$

de cette équation on tire $x = \frac{1}{2n+1}$, valeur positive et moindre que 1. Dans la série (1) remplaçons x par $\frac{1}{2n+1}$; nous obtenons la série

$$(2) \qquad \frac{2}{2n+1},\quad \frac{2}{3(2n+1)^3},\quad \frac{2}{5(2n+1)^5},\quad \frac{2}{7(2n+1)^7},\quad \ldots,$$

qui est convergente et a pour somme $L\left(\frac{n+1}{n}\right)$ ou $L(n+1) - Ln$. Cette série (2) permet de calculer de proche en proche les logarithmes népériens des différents nombres entiers. Faisons-y d'abord $n = 1$; nous obtenons la série convergente

$$\frac{2}{3},\quad \frac{2}{3 \times 3^3},\quad \frac{2}{5 \times 3^5},\quad \frac{2}{7 \times 3^7},\quad \ldots,$$

dont la somme est L2. Faisons maintenant $n = 2$; nous obte-

nons la série convergente

$$\frac{2}{5}, \quad \frac{2}{3\times 5^3}, \quad \frac{2}{5\times 5^5}, \quad \frac{2}{7\times 5^7}, \quad \ldots,$$

dont la somme est $L3 - L2$; de sorte qu'en ajoutant cette somme à $L2$, on trouve $L3$. Et ainsi de suite.

Pour transformer la série (2) en une série qui permette de calculer les logarithmes décimaux des différents nombres entiers, il faut commencer par calculer le module M du système décimal. Or on a $M = \frac{1}{L10} = \frac{1}{L2 + L5}$, de sorte que tout revient à calculer $L5$. Pour cela, faisons $n = 4$ dans la série (2) ; nous obtenons la série convergente

$$\frac{2}{9}, \quad \frac{2}{3\times 9^3}, \quad \frac{2}{5\times 9^5}, \quad \frac{2}{7\times 9^7}, \quad \ldots,$$

dont la somme A est égale à $L5 - L4$ ou à $L5 - 2L2$. On a donc

$$L5 = 2L2 + A, \qquad \text{et par suite} \qquad M = \frac{1}{3L2 + A}.$$

On a maintenant, quel que soit l'entier positif n,

$$\log n = MLn :$$

si donc on multiplie par M les termes de la série (2), on obtient la série convergente

$$(3) \qquad \frac{2M}{2n+1}, \quad \frac{2M}{3(2n+1)^3}, \quad \frac{2M}{5(2n+1)^5}, \quad \frac{2M}{7(2n+1)^7}, \quad \ldots,$$

dont la somme est $\log(n+1) - \log n$. Pour $n = 1$, cette série a pour somme $\log 2$; pour $n = 2$, elle a pour somme $\log 3 - \log 2$, et servira par suite à calculer $\log 3$; et ainsi de suite.

C'est au moyen de ces séries que l'on a dressé les tables dont nous avons expliqué l'usage dans le chapitre V.

Développement en série de arc tg x.

261. Considérons la série, alternée quel que soit x :

$$(1) \qquad \frac{x}{1}, \quad -\frac{x^3}{3}, \quad +\frac{x^5}{5}, \quad -\frac{x^7}{7}, \quad \ldots, \quad (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}, \quad \ldots.$$

Nous allons démontrer, *sous la condition* $|x| \leqslant 1$: 1° *que cette série est convergente ;* 2° *que sa somme est* arc tg x. Remarquons d'abord que, pour $|x| \leqslant 1$, le $n^{\text{ième}}$ terme u_n de la série tend

vers 0 quand n augmente indéfiniment. Appelons maintenant S_n la somme des n premiers termes, et $\varphi_n(z)$ le polynome

$$\frac{z}{1}-\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}-\frac{z^7}{7}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{2n-1}.$$

Supposons $x>0$. On a

$$\varphi'_n(z)=1-z^2+z^4-z^6+\ldots+(-1)^{n-1}z^{2n-2}=\frac{(-1)^n z^{2n}-1}{-z^2-1},$$

et par suite

$$\frac{1}{z^2+1}-\varphi'_n(z)=\frac{(-1)^n z^{2n}}{z^2+1}.$$

La fonction $\frac{1}{z^2+1}-\varphi'_n(z)$ est la dérivée de la fonction $y=\operatorname{arc\,tg} z-\varphi_n(z)$. Quel que soit z, cette dérivée est positive pour n pair, négative pour n impair. Donc, pour n pair, la fonction y est croissante dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$; comme elle est nulle pour $z=0$, elle est positive pour $z>0$. Si au contraire n est impair, la fonction y est décroissante dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$, et par suite négative pour $z>0$. En appliquant ces résultats à $z=x$, on voit qu'on a : pour n pair, $\operatorname{arc\,tg} x > S_n$; pour n impair, $\operatorname{arc\,tg} x < S_n$. Par suite, le rapport $\frac{\operatorname{arc\,tg} x - S_n}{S_{n+1}-S_n}$ est compris entre 0 et 1, et on a l'inégalité

$$|\operatorname{arc\,tg} x - S_n| < |u_{n+1}|$$

qui se trouve établie pour toute valeur positive de x, et qui reste vraie pour x négatif, comme il est aisé de le voir.

Supposons maintenant $|x|\leqslant 1$; alors, n augmentant indéfiniment, u_{n+1} tend vers 0, et par suite S_n tend vers $\operatorname{arc\,tg} x$. De plus, S_n tend vers sa limite par valeurs alternativement supérieures et inférieures à cette limite.

En particulier, la série

$$\frac{1}{1},\quad -\frac{1}{3},\quad +\frac{1}{5},\quad -\frac{1}{7},\quad \ldots$$

a pour somme $\operatorname{arc\,tg} 1$ ou $\frac{\pi}{4}$.

Comme application, on peut former une série dont la somme est π. On part de l'égalité, facile à vérifier,

$$\pi=16\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}-4\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{239};$$

les deux séries

$$\frac{16}{5},\quad -\frac{16}{3\times 5^3},\quad +\frac{16}{5\times 5^5},\quad -\frac{16}{7\times 5^7},\quad \ldots,$$

$$\frac{4}{239},\quad -\frac{4}{3\times 239^3},\quad +\frac{4}{5\times 239^5},\quad -\frac{4}{7\times 239^7},\quad \ldots$$

ont respectivement pour somme $16 \text{ arc tg } \frac{1}{5}$ et $4 \text{ arc tg } \frac{1}{239}$; la série que l'on forme en retranchant de chaque terme de la première le terme de même rang de la seconde aura pour somme π.

Étude de quelques fonctions transcendantes.

262. Fonction $y = x^x$. Cette fonction est définie dans l'intervalle $(+\varepsilon, +\infty)$ et admet, comme nous l'avons vu, la dérivée

$$y' = x^x(\mathrm{L}x + 1) = y(\mathrm{L}x + 1).$$

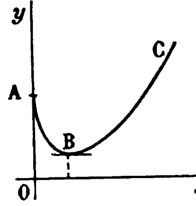
Cette dérivée a le même signe que $\mathrm{L}x + 1$ ou $\mathrm{L}(ex)$; ce signe dépend de la position de ex par rapport à 1. Pour $x < \frac{1}{e}$, ex est plus petit que 1, et $\mathrm{L}(ex)$ est négatif; pour $x > \frac{1}{e}$, $\mathrm{L}(ex)$ est positif. La fonction y est donc décroissante dans l'intervalle $\left(+\varepsilon, \frac{1}{e}\right)$ et croissante dans l'intervalle $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$.

Pour voir ce que devient y quand x tend vers zéro ou augmente indéfiniment, écrivons $y = e^{x\mathrm{L}x}$. x augmentant indéfiniment, $\mathrm{L}x$ augmente indéfiniment par valeurs positives, et il en est de même de y. Faisons maintenant tendre x vers 0 par valeurs positives. $\mathrm{L}x$ augmentant indéfiniment par valeurs négatives, on ne voit pas tout de suite ce que devient le produit $x\mathrm{L}x$. Posons $\mathrm{L}x = -t$, d'où $x = e^{-t}$; t augmente indéfiniment par valeurs positives quand x tend vers 0. On a $x\mathrm{L}x = \frac{-t}{e^t}$; or ce rapport tend vers 0 lorsque t augmente indéfiniment par valeurs positives, puisque le rapport $\frac{e^t}{t}$ augmente indéfiniment. Donc enfin $e^{x\mathrm{L}x}$ tend vers e^0, c'est-à-dire vers 1.

Voici le tableau qui résume cette étude :

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
y'		$-$		$+$	
y	1	décroît	$\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$ *minimum*	croît	$+\infty$

Voici maintenant la ligne qui représente la variation de y. La longueur OA est égale à 1, et le point B a pour coordonnées $\frac{1}{e}$ et $\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$; en ce point la tangente est horizontale. Cette ligne donne lieu aux remarques suivantes. x augmentant indéfiniment, y' augmente indéfiniment : la tangente en un point de BC tend donc à devenir parallèle à Oy lorsque ce point s'éloigne à l'infini. x tendant vers 0 (par valeurs positives), y' augmente indéfiniment : cela prouve qu'en A la ligne est tangente à Oy. Enfin, si nous formons la dérivée seconde de la fonction y, nous trouvons



$$y'' = y'(\mathrm{L}x+1) + \frac{y}{x} = y(\mathrm{L}x+1)^2 + \frac{y}{x},$$

résultat essentiellement positif : la ligne ne cesse donc pas de tourner sa concavité vers les y positifs.

Fonction $y = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$. Cette fonction est définie dans les deux intervalles $(-\infty, -1-\varepsilon)$, $(+\varepsilon, +\infty)$; en l'écrivant

$$y = e^z, \qquad \text{avec} \qquad z = x\mathrm{L}\left(1+\frac{1}{x}\right),$$

nous avons vu qu'elle admet la dérivée

$$y' = yz', \qquad z' = \mathrm{L}\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}.$$

Cette dérivée a le même signe que z'. La fonction z' est définie dans les mêmes intervalles que la fonction y et admet la dérivée

$$z'' = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-1}{x(x+1)^2},$$

qui a le signe de $-x$. La fonction z' est donc croissante dans l'intervalle $(-\infty, -1-\varepsilon)$ et décroissante dans l'intervalle $(+\varepsilon, +\infty)$; comme elle tend vers 0 quand x augmente indéfiniment, elle est positive quel que soit x. Donc enfin la fonction y croît dans les deux intervalles $(-\infty, -1-\varepsilon)$, $(+\varepsilon, +\infty)$.

x augmentant indéfiniment, nous savons que y tend vers e. Nous voyons que *y tend vers e par valeurs supérieures ou inférieures à e, suivant que x augmente indéfiniment par valeurs négatives ou par valeurs positives*. Pour voir ce qui arrive quand x tend vers -1 ou vers 0, écrivons y sous la forme e^z. x tendant vers -1 (par valeurs inférieures à -1), $\mathrm{L}\left(1+\frac{1}{x}\right)$ augmente indéfiniment

par valeurs négatives : z augmente donc indéfiniment par valeurs positives, et il en est de même de y. x tendant vers 0 (par valeurs positives), $L\left(1+\frac{1}{x}\right)$ augmente indéfiniment par valeurs positives, et l'on ne voit pas tout de suite ce que devient le produit $xL\left(1+\frac{1}{x}\right)$. Mais écrivons

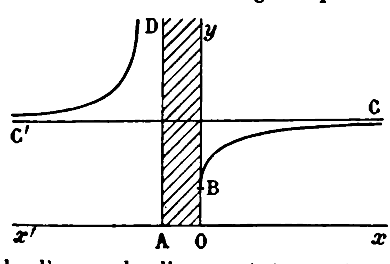
$$xL\left(1+\frac{1}{x}\right) = xL\frac{x+1}{x} = xL(x+1) - xLx;$$

quand x tend vers 0, $xL(x+1)$ tend évidemment vers 0, et nous avons vu précédemment qu'il en est de même de xLx. Le produit $xL\left(1+\frac{1}{x}\right)$ tend donc vers 0, et y tend vers 1.

En résumé, on a le tableau suivant :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
y'		$+$				$+$	
y	e	croît	$+\infty$		1	croît	e

Voici maintenant la ligne représentant la marche de la fonction :



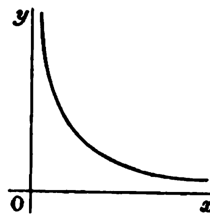
Cette ligne admet pour asymptotes la droite C'C, d'équation $y = e$, et la droite AD, d'équation $x = -1$. La longueur OB est égale à 1. x tendant vers 0 par valeurs positives, y' augmente indéfiniment ; on conclut de là que la ligne est tangente en B à Oy.

Fonction $y = \frac{a^x}{x^n}$, n étant une constante différente de 0, et a une constante positive différente de 1.

Cette fonction est définie et continue dans l'intervalle $(+\varepsilon, +\infty)$. Ses deux termes sont essentiellement positifs. Dans l'étude de sa variation, nous distinguerons deux cas : n positif, n négatif.

Supposons d'abord n positif. Alors x^n croît en même temps que x. Si a est compris entre 0 et 1, a^x décroît quand x croît : la fonction y est donc décroissante. Nous avons vu d'ailleurs qu'elle augmente indéfiniment quand x tend vers 0 et qu'elle tend vers 0

quand x augmente indéfiniment. La marche de la fonction est représentée par la ligne ci-contre.



Si maintenant a est supérieur à 1, les deux termes de la fraction vont en croissant, et l'on ne voit pas tout de suite dans quel sens varie y. Mais la fonction admet une dérivée

$$y' = \frac{a^x}{x^{n+1}}(x\mathrm{L}a - n).$$

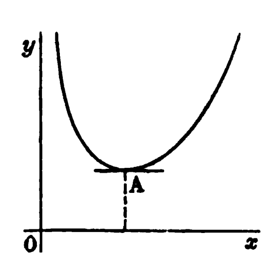
Cette dérivée est négative pour $x < \frac{n}{\mathrm{L}a}$ et positive pour $x > \frac{n}{\mathrm{L}a}$. La fonction y est donc décroissante dans l'intervalle $\left(+\varepsilon, \frac{n}{\mathrm{L}a}\right)$ et croissante dans l'intervalle $\left(\frac{n}{\mathrm{L}a}, +\infty\right)$. Elle augmente indéfiniment, que x tende vers 0 ou augmente indéfiniment.

En résumé, on a le tableau suivant :

x	0		$\frac{n}{\mathrm{L}a}$		$+\infty$
y'		$-$		$+$	
y	$+\infty$	décroît	y_1	croît	$+\infty$

minimum

Voici la ligne représentant la marche de la fonction :



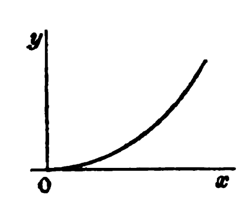
Le point A de cette ligne a pour coordonnées $\frac{n}{\mathrm{L}a}$ et

$$y_1 = a^{\frac{n}{\mathrm{L}a}} \times \left(\frac{\mathrm{L}a}{n}\right)^n = \left(\frac{e\mathrm{L}a}{n}\right)^n;$$

la tangente en ce point est horizontale.

Supposons maintenant n négatif. Alors la fonction x^n est décroissante ; pour $a > 1$, la fonction a^x est croissante, et par suite la fonction $y = \frac{a^x}{x^n}$ est également croissante. Elle tend vers 0 et augmente indéfiniment en même temps que

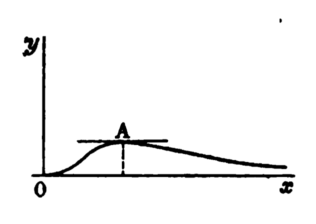
x. La marche de la fonction est représentée par la ligne ci-contre.



Si a est compris entre 0 et 1, les deux termes de la fraction vont en décroissant quand x croît, et il faut avoir de nouveau recours à la dérivée $y' = \frac{a^x}{x^{n+1}}(x\mathrm{L}a - n)$. Cette fois, elle est positive pour $x < \frac{n}{\mathrm{L}a}$ et négative pour $x > \frac{n}{\mathrm{L}a}$: la fonction y est donc croissante dans l'intervalle $\left(+\varepsilon, \frac{n}{\mathrm{L}a}\right)$ et décroissante dans l'intervalle $\left(\frac{u}{\mathrm{L}a}, +\infty\right)$. Elle tend vers 0, que x tende vers 0 ou augmente indéfiniment. On a donc le tableau suivant :

x	0		$\frac{n}{\mathrm{L}a}$		$+\infty$
y'		+		$-$	
y	0	croît	y_1 *maximum*	décroît	0

Voici la ligne représentant la marche de la fonction :



Le point A de cette ligne a pour coordonnées $\frac{n}{\mathrm{L}a}$ et $y_1 = \left(\frac{e\mathrm{L}a}{n}\right)^n$; la tangente en ce point est horizontale. A l'origine, la ligne est tangente à Ox ou à Oy, suivant que $n + 1$ est négatif ou positif ; car, x tendant vers 0, y' tend vers 0 si $n + 1$ est négatif et augmente indéfiniment si $n + 1$ est positif. Nous avons supposé sur la figure $n + 1 < 0$.

Nous n'avons étudié la fonction précédente que dans l'intervalle $(+\varepsilon, +\infty)$, parce que nous avons laissé n tout à fait quelconque ; mais si n est égal à $\frac{p}{q}$, p et q étant deux entiers premiers entre eux, la fonction est définie aussi dans l'intervalle $(-\infty, -\varepsilon)$, pourvu que q soit impair.

EXERCICES

*1. Trouver pour les fonctions $C(x)$, $S(x)$ définies page 348, exercice 10, des développements analogues à ceux qui ont été donnés pour cos x et sin x.

*2. Démontrer que, sous la condition $|x| \leqslant 1$, la fonction

$$x \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2} L(1 + x^2)$$

est la somme d'une série de la forme

$$a_0, \quad a_1 x, \quad a_2 x^2, \quad \dots .$$

*3. Même question pour la fonction $L\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

*4. Trouver les bases des systèmes de logarithmes dans lesquels un nombre peut être égal à son logarithme, en employant l'un des procédés suivants :

1° On étudiera la fonction $x - \log_a x$; et l'on cherchera la condition pour qu'elle puisse devenir nulle.

2° On étudiera la fonction $\dfrac{x}{\log_a x}$; et l'on cherchera la condition pour qu'elle puisse devenir égale à l'unité.

3° On étudiera la fonction $a^x - x$; et l'on cherchera la condition pour qu'elle puisse devenir égale à zéro.

4° On étudiera la fonction $\dfrac{a^x}{x}$; et l'on cherchera la condition pour qu'elle puisse devenir égale à l'unité.

*5. Examiner si l'équation

$$x^m = m^x$$

peut admettre une autre solution que $x = m$. X=4, m=2

On met facilement cette équation sous la forme

$$\frac{Lx}{x} = \frac{Lm}{m}.$$

On répondra donc à la question en étudiant la fonction $\dfrac{Lx}{x}$ et en cherchant si cette fonction peut prendre deux fois la même valeur pour des valeurs différentes m et x de la variable. BERTRAND.

* 6. Etudier les fonctions

$$x^{\frac{1}{x}}, \quad x^{-\frac{1}{x^2}}, \quad \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^4}, \quad e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x+4}.$$

*7. Etudier la fonction $\frac{\log_a x}{x^n}$, n étant une constante différente de 0 et a une constante positive différente de 1.

* 8. Etudier les fonctions

$$\frac{Lx}{1+x-Lx}, \quad (1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

* 9. Trouver la limite, pour x infini, de la fonction $(x+1)^{1+\frac{1}{x+1}} - x^{1+\frac{1}{x}}$.

APPENDICES

APPENDICE I.

263. Théorème I. — *Le produit de n nombres variables assujettis uniquement à rester positifs et à avoir une somme constante est le plus grand possible quand ces nombres sont égaux.*

Appelons $x_1, x_2, \cdots, x_n$ les n nombres variables, assujettis uniquement aux conditions

(1) $x_1 > 0, x_2 > 0, \ldots, x_n > 0; \quad x_1 + x_2 + \cdots + x_n = na,$

a étant un nombre positif donné. Leur produit

$$P = x_1 x_2 \ldots x_n$$

est une *fonction de* $n-1$ *variables indépendantes :* car on peut prendre pour $x_2, \ldots, x_n$ des valeurs quelconques $x'_2, \ldots, x'_n$, positives et de somme moindre que na, puis, pour x_1, la valeur $na - (x'_2 + \cdots + x'_n)$. Parmi les systèmes de valeurs que peuvent prendre $x_1, x_2, \ldots, x_n$, il y en a un et un seul composé de valeurs toutes égales : c'est le système

(2) $$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = a;$$

la valeur correspondante de P est a^n. Soit

(3) $x_1 = x'_1, \qquad x_2 = x'_2, \qquad \ldots, \qquad x_n = x'_n$

un système de valeurs vérifiant les conditions (1) autre que le système (2), et soit

$$P' = x'_1 x'_2 \ldots x'_n.$$

Le théorème consiste en ce que P′ est forcément moindre que a^n.

Parmi les valeurs constituant le système (3), il y en a nécessairement une qui est supérieure à a, car si l'on avait

$$x'_1 \leqslant a, \qquad x'_2 \leqslant a, \qquad \ldots, \qquad x'_n \leqslant a,$$

comme on n'a pas à la fois

$$x'_1 = a, \qquad x'_2 = a, \qquad \ldots, \qquad x'_n = a,$$

on aurait

$$x'_1 + x'_2 + \cdots + x'_n < na,$$

ce qui est faux. De même, parmi les valeurs constituant le système (3), il y en certainement une qui est inférieure à a. Soit

$$x_1 = a + \varepsilon, x'_2 = a - \eta, \quad \text{avec} \quad \varepsilon > 0, \ 0 < \eta < a.$$

Parmi les systèmes de valeurs que peuvent prendre $x_1, x_2, \cdots, x_n$ se trouve le système suivant :

$$(4) \qquad x_1 = a, x_2 = a + \varepsilon - \eta, x_3 = x'_3, \ldots, x_n = x'_n :$$

car les valeurs composant ce système sont toutes positives et ont une somme égale à $x'_1 + x'_2 + \cdots + x'_n$, c'est-à-dire à na. La valeur correspondante

$$P'' = a(a + \varepsilon - \eta) x'_3 \ldots x'_n$$

du produit P est supérieure à P', car le produit

$$a(a + \varepsilon - \eta) = a^2 + a(\varepsilon - \eta)$$

est supérieur au produit

$$(a + \varepsilon)(a - \eta) = a^2 + a(\varepsilon - \eta) - \varepsilon\eta.$$

Enfin il y a dans le système (4) au moins une valeur égale à a de plus que dans le système (3).

Si toutes les valeurs composant le système (4) sont égales à a, le théorème est démontré, car alors P'' est égal à a^n, et P' est inférieur à a^n. S'il n'en est pas ainsi, opérons sur le système (4) comme nous venons d'opérer sur le système (3) : nous formerons un nouveau système (5) de valeurs vérifiant les conditions (1), auquel système correspondra une valeur P''' de P supérieure à P'', et qui renfermera au moins une valeur égale à a de plus que le système (4). Si toutes les valeurs composant le système (5) sont égales à a, le théorème est démontré, car

alors P''' est égal à a^n, et l'on a $P' < P'' < a^n$. S'il n'en est pas ainsi, nous recommencerons la même opération, et nous finirons par arriver ainsi au système (2); et comme, à chaque fois, la valeur du produit P augmente, sa valeur initiale P' est certainement moindre que sa valeur finale a^n.

Corollaire. — *Quand n nombres positifs ne sont pas égaux, leur moyenne géométrique est moindre que leur moyenne arithmétique.*

Appelons, en effet, $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ ces n nombres positifs, et soit a leur moyenne arithmétique, de sorte que l'on a

$$x'_1 + x'_2 + \cdots + x'_n = na.$$

Considérons le produit $P = x_1 x_2 \ldots x_n$ dont les facteurs sont assujettis à satisfaire aux conditions

$$x_1 > 0,\ x_2 > 0,\ \ldots,\ x_n > 0; \qquad x_1 + x_2 + \cdots + x_n = na.$$

Parmi les systèmes de valeurs satisfaisant à ces conditions se trouve le système $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$. Et comme les valeurs composant ce système ne sont pas toutes égales, on a, en vertu du théorème précédent :

$$x'_1 x'_2 \cdots x'_n < a^n, \qquad \text{ou} \qquad \sqrt[n]{x'_1 x'_2 \ldots x'_n} < \frac{x'_1 + x'_2 + \cdots + x'_n}{n};$$

c'est ce qu'il fallait démontrer.

Application. — De tous les parallélépipèdes rectangles ayant même surface 2S, quel est celui qui a le plus grand volume?

Appelons x, y, z les nombres qui mesurent les dimensions variables d'un parallélépipède rectangle de surface 2S. Ils sont uniquement assujettis à être positifs et à vérifier la relation

$$yz + zx + xy = S.$$

Le volume V a pour mesure xyz. Posons

$$(1) \qquad X = yz, \qquad Y = zx, \qquad Z = xy.$$

Les nombres X, Y, Z sont assujettis à rester positifs et à vérifier la relation

$$X + Y + Z = S;$$

ils ne sont d'ailleurs assujettis à aucune autre condition, car,

si X, Y, Z sont positifs, les équations (1) donnent pour x, y, z les valeurs positives

$$x = \sqrt{\frac{YZ}{X}}, \quad y = \sqrt{\frac{ZX}{Y}}, \quad z = \sqrt{\frac{XY}{Z}}.$$

Si l'on remplace x, y, z par ces valeurs dans l'expression de V, on trouve

$$V = \sqrt{XYZ}.$$

Or le produit XYZ est le plus grand possible pour

$$X = Y = Z = \frac{S}{3}, \qquad \text{ou pour} \qquad x = y = z = \sqrt{\frac{S}{3}}.$$

C'est à ce même système de valeurs de x, y, z que correspond la plus grande valeur de V. Ainsi, de tous les parallélépipèdes rectangles ayant même surface, celui qui a le plus grand volume est le cube.

On démontre d'une manière analogue que, de tous les triangles qui ont même périmètre, celui qui a la plus grande surface est le triangle équilatéral.

264. Théorème II. — *La somme de n nombres variables assujettis uniquement à rester positifs et à avoir un produit constant est la plus petite possible quand ces nombres sont égaux.*

Appelons $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les n nombres variables, assujettis uniquement aux conditions

$$(1) \quad x_1 > 0, x_2 > 0, \quad \ldots, \quad x_n > 0; \quad x_1 x_2 \ldots x_n = a^n,$$

a étant un nombre positif donné. Leur somme

$$S = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

est une fonction de $n - 1$ variables indépendantes. Parmi les systèmes de valeurs de $x_1, x_2, \cdots, x_n$ satisfaisant aux conditions (1), il y en a un et un seul composé de valeurs toutes égales : c'est le système

$$(2) \qquad x_1 = x_2 = \cdots = x_n = a;$$

la valeur correspondante de S est na. Soit

$$(3) \quad x_1 = x_1', \qquad x_2 = x_2', \qquad \ldots, \qquad x_n = x_n'$$

un système de valeurs vérifiant les conditions (1) autre que le système (2), et soit

$$S' = x'_1 + x'_2 + \cdots + x'_n.$$

Nous allons montrer que S' est supérieur à na.

En effet, les nombres positifs $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ n'étant pas tous égaux, leur moyenne arithmétique surpasse leur moyenne géométrique. On a donc

$$\frac{x'_1 + x'_2 + \cdots + x'_n}{n} > \sqrt[n]{x'_1 x'_2 \ldots x'_n},$$

ou

$$S' > na.$$

Application. — De tous les parallélépipèdes rectangles ayant même volume V, quel est celui qui a la plus petite surface?

Soit x, y, z les nombres mesurant les dimensions variables d'un parallélépipède rectangle de volume V. Ils sont uniquement assujettis à être positifs et à vérifier la relation

$$xyz = V.$$

La surface S du parallélépipède a pour mesure

$$2(yz + zx + xy).$$

Si nous posons de nouveau

$$X = yz, \qquad Y = zx, \qquad Z = xy,$$

d'où

$$x = \sqrt{\frac{YZ}{X}}, \quad y = \sqrt{\frac{ZX}{Y}}, \quad z = \sqrt{\frac{XY}{Z}},$$

nous voyons que les nombres X, Y, Z sont uniquement assujettis à rester positifs et à avoir un produit égal à V^2. D'ailleurs on a $S = 2(X + Y + Z)$. Or la somme $X + Y + Z$ est la plus petite possible pour

$$X = Y = Z = \sqrt[3]{V^2}, \qquad \text{ou pour} \qquad x = y = z = \sqrt[3]{V}.$$

C'est à ce même système de valeurs de x, y, z que correspond la plus petite valeur de S. Ainsi, de tous les parallélépipèdes rectangles ayant même volume, celui qui a la plus petite surface est le cube.

265. Théorème III. — *Considérons le produit*

$$P = x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_p^{m_p},$$

où $m_1, m_2, \ldots, m_p$ *sont des entiers positifs donnés, et où les nombres* $x_1, x_2, \ldots, x_p$ *sont uniquement assujettis aux conditions*

$$(1)\quad x_1 > 0,\quad x_2 > 0,\quad \ldots,\quad x_p > 0;\quad x_1 + x_2 + \cdots + x_p = a,$$

a étant un nombre positif donné. Ce produit est le plus grand possible quand les nombres $x_1, x_2, \ldots, x_p$ *sont proportionnels à leurs exposants* $m_1, m_2, \ldots, m_p$.

Remarquons d'abord que le système

$$\frac{x_1}{m_1} = \frac{x_2}{m_2} = \cdots = \frac{x_p}{m_p}, \qquad x_1 + x_2 + \cdots + x_p = a$$

admet une solution unique :

$$(2)\quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{am_1}{m_1 + m_2 + \cdots + m_p}, \\ x_2 = \dfrac{am_2}{m_1 + m_2 + \cdots + m_p}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_p = \dfrac{am_p}{m_1 + m_2 + \cdots + m_p}, \end{cases}$$

et que les valeurs qui composent cette solution sont toutes positives ; la valeur correspondante de P est

$$\left(\frac{a}{m_1 + m_2 + \cdots + m_p}\right)^{m_1 + m_2 + \cdots + m_p} \times m_1^{m_1} m_2^{m_2} \ldots m_p^{m_p} = A.$$

Soit maintenant

$$(3)\quad x_1 = x_1' \qquad x_2 = x_2', \qquad \ldots, \qquad x_p = x_p'$$

un système de valeurs vérifiant les conditions (1) autre que le système (2), et soit

$$P' = x_1'^{m_1} x_2'^{m_2} \ldots x_p'^{m_p}.$$

Nous allons montrer que P′ est inférieur à A.

Considérons, en effet, $m_1 + m_2 + \cdots + m_p$ nombres positifs, dont m_1 égaux à $\dfrac{x_1'}{m_1}$, m_2 égaux à $\dfrac{x_2'}{m_2}$, $\ldots$, m_p égaux à $\dfrac{x_p'}{m_p}$.

Comme ils ne sont pas tous égaux, leur moyenne géométrique est moindre que leur moyenne arithmétique. On a donc

$$\sqrt[m_1+m_2+\cdots+m_p]{\frac{x_1'^{m_1}x_2'^{m_2}\ldots x_p'^{m_p}}{m_1^{m_1}m_2^{m_2}\ldots m_p^{m_p}}} < \frac{x_1'+x_2'+\cdots+x_p'}{m_1+m_2+\cdots+m_p},$$

ou

$$\sqrt[m_1+m_2+\cdots+m_p]{\frac{P'}{m_1^{m_1}m_2^{m_2}\ldots m_p^{m_p}}} < \frac{a}{m_1+m_2+\cdots+m_p}, \text{ ou } P' < A.$$

266. Théorème IV. — *Considérons la somme*

$$S = x_1 + x_2 + \cdots + x_p,$$

les nombres $x_1, x_2, \ldots, x_p$ *étant uniquement assujettis aux conditions*

(1) $x_1 > 0, \quad x_2 > 0, \quad \ldots, \quad x_p > 0; \qquad x_1^{m_1}x_2^{m_2}\ldots x_p^{m_p} = a$

($m_1, m_2, \ldots, m_p$ sont des entiers positifs donnés, et a est un nombre positif donné). Cette somme est la plus petite possible quand les nombres $x_1, x_2, \ldots, x_p$ sont proportionnels aux nombres $m_1, m_2, \ldots, m_p$.

Remarquons d'abord que le système

$$\frac{x_1}{m_1} = \frac{x_2}{m_2} = \cdots = \frac{x_p}{m_p}, \qquad x_1^{m_1}x_2^{m_2}\ldots x_p^{m_p} = a$$

admet une solution et une seule composée de valeurs toutes positives. Cette solution est la suivante :

(2) $x_1 = m_1\lambda, \quad x_2 = m_2\lambda, \quad \ldots, \quad x_p = m_p\lambda,$

λ désignant le nombre

$$\sqrt[m_1+m_2+\cdots+m_p]{\frac{a}{m_1^{m_1}m_2^{m_2}\ldots m_p^{m_p}}}.$$

La valeur correspondante de S est $\lambda(m_1+m_2+\cdots+m_p)$. Soit maintenant

(3) $x_1 = x_1', \quad x_2 = x_2', \quad \ldots, \quad x_p = x_p'$

un système de valeurs vérifiant les conditions (1) autre que le système (2), et soit

$$S' = x_1' + x_2' + \cdots + x_p'.$$

Nous allons montrer que S' est $> \lambda(m_1 + m_2 + \cdots + m_p)$.

Considérons, en effet, $m_1 + m_2 + \cdots + m_p$ nombres positifs, dont m_1 égaux à $\frac{x'_1}{m_1}$, m_2 égaux à $\frac{x'_2}{m_2}$, ..., m_p égaux à $\frac{x'_p}{m_p}$. Ces nombres n'étant pas tous égaux, leur moyenne arithmétique est supérieure à leur moyenne géométrique. On a donc

$$\frac{x'_1 + x'_2 + \cdots + x'_p}{m_1 + m_2 + \cdots + m_p} > \sqrt[m_1+m_2+\cdots+m_p]{\frac{x_1'^{m_1} x_2'^{m_2} \ldots x_p'^{m_p}}{m_1^{m_1} m_2^{m_2} \ldots m_p^{m_p}}},$$

ou

$$\frac{S'}{m_1 + m_2 + \cdots + m_p} > \lambda, \quad \text{ou} \quad S' > \lambda(m_1 + m_2 + \cdots + m_p).$$

267. Remarque applicable aux quatre théorèmes précédents. Si les nombres variables x_1, x_2, ... doivent satisfaire, non seulement aux conditions (1), mais encore à d'autres conditions (1)', les théorèmes précédents ne leur sont généralement pas applicables. Ils restent vrais néanmoins *dans le cas particulier où le système de valeurs* (2) *satisfait aux conditions* (1)'. Donnons un exemple.

De tous les triangles ayant même surface S, quel est celui qui a le plus petit périmètre ?

x, y, z étant les côtés d'un triangle de surface S, on a

$$\sqrt{\frac{x+y+z}{2} \times \frac{y+z-x}{2} \times \frac{z+x-y}{2} \times \frac{x+y-z}{2}} = S.$$

Posons

$$\frac{y+z-x}{2} = X, \qquad \frac{z+x-y}{2} = Y, \qquad \frac{x+y-z}{2} = Z,$$

d'où

$$x = Y + Z, \qquad y = Z + X, \qquad z = X + Y.$$

On a dès lors

$$x + y + z = 2(X + Y + Z),$$

et

$$(X + Y + Z)XYZ = S^2.$$

Posons maintenant

$$X + Y + Z = 3T;$$

les quantités X, Y, Z, T sont assujetties, d'abord aux conditions

$$(1) \quad X > 0, \quad Y > 0, \quad Z > 0, \quad T > 0; \qquad XYZT = \frac{S^2}{3},$$

et ensuite à la condition

$$(1)' \qquad X + Y + Z = 3T;$$

mais cette dernière condition est vérifiée par les valeurs

$$(2) \qquad X = Y = Z = T = \sqrt[4]{\frac{S^2}{3}}.$$

C'est donc pour ces valeurs (2) que la somme $X + Y + Z + T$ est la plus petite possible. Or on a

$$x + y + z = \frac{1}{2}(3X + 3Y + 3Z + 3T) = \frac{3}{2}(X + Y + Z + T):$$

le périmètre est donc aussi le plus petit possible pour

$$X = Y = Z = T = \sqrt[4]{\frac{S^2}{3}}, \quad \text{ou pour} \quad x = y = z = 2\sqrt[4]{\frac{S^2}{3}}.$$

Ainsi, de tous les triangles ayant même surface, c'est le triangle équilatéral qui a le plus petit périmètre.

APPENDICE II

268. Nous nous proposons, dans ce second appendice, de démontrer les propositions dont nous nous sommes servis aux numéros 192 et 224. Nous nous appuierons sur le théorème que voici :

Théorème. — *Soit $f(x)$ une fonction continue et admettant une dérivée $f'(x)$ également continue dans l'intervalle (a, b) ; si, en outre, cette fonction admet une dérivée seconde $f''(x)$ pour toutes les valeurs de x comprises entre a et b, il existe un nombre* c COMPRIS ENTRE *a* ET *b pour lequel on a*

$$(1) \qquad f(b) = f(a) + (b - a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2}f''(c).$$

Désignons, en effet, par A le nombre

$$f(b) - f(a) - (b - a)f'(a),$$

et considérons la fonction

$$\varphi(x) = f(b) - f(x) - (b - x)f'(x) - \frac{A}{(b-a)^2}(b - x)^2.$$

Elle est continue dans l'intervalle (a, b); elle admet, pour toutes les valeurs de x comprises entre a et b, une dérivée

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= -f'(x) + f'(x) - (b-x)f''(x) + 2\frac{A}{(b-a)^2}(b-x)\\ &= (b-x)\left[\frac{2A}{(b-a)^2} - f''(x)\right];\end{aligned}$$

enfin elle s'annule pour $x = a$ et pour $x = b$. En vertu du théorème de Rolle, il existe entre a et b un nombre c pour lequel on a

$$\varphi'(c) = 0, \qquad \text{ou} \qquad (b-c)\left[\frac{2A}{(b-a)^2} - f''(c)\right] = 0,$$

d'où l'on tire

$$A = \frac{(b-a)^2}{2} f''(c);$$

c'est ce qu'il fallait démontrer.

269. Comme première application, démontrons que, n étant un nombre au moins égal à 10^4, et h un nombre compris entre 0 et 1, si l'on pose

$$\log(n+h) - \log n = h[\log(n+1) - \log n] + \frac{\eta}{10^7},$$

on a $|\eta| < \frac{1}{40}$.

Soit, pour abréger,

$$A = \log(n+h) - \log n = ML\left(1 + \frac{h}{n}\right),$$

$$B = \log(n+1) - \log n = ML\left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

M étant le module des logarithmes décimaux, de sorte qu'on a

$$\eta = 10^7[A - hB].$$

En appliquant le théorème précédent à la fonction $L(1+x)$ et, successivement, à l'intervalle $\left(0, \frac{h}{n}\right)$, puis à l'intervalle $\left(0, \frac{1}{n}\right)$, on voit qu'il existe deux nombres *positifs* x_1, x_2, tels qu'on ait

$$L\left(1 + \frac{h}{n}\right) = \frac{h}{n} - \frac{h^2}{2n^2(1+x_1)^2},$$

$$L\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2(1+x_2)^2};$$

dès lors on a

$$\eta = 10^7 \times M \times \frac{h}{2n^2}\left[\frac{1}{(1+x_2)^2} - \frac{h}{(1+x_1)^2}\right].$$

La quantité entre parenthèses étant moindre en valeur absolue que 1, on a

$$|\eta| < 10^7 \times M \times \frac{h}{2n^2} < 10^7 \times \frac{44}{100} \times \frac{1}{2 \times 10^8} \text{ ou } \frac{22}{1000};$$

donc, *a fortiori*, $|\eta|$ est moindre que $\frac{1}{40}$.

270. En second lieu, appelons α la mesure trigonométrique d'un angle au moins égal à 6° et au plus égal à 89° 59′ 50″, et soit ε la mesure trigonométrique de l'angle de 10″ $\left(\alpha \leqslant \frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)$; β étant un nombre compris entre 0 et ε, posons

$$\log \sin(\alpha + \beta) - \log \sin \alpha = \frac{\beta}{\varepsilon}[\log \sin(\alpha + \varepsilon) - \log \sin \alpha] + \frac{\eta}{10^7}.$$

Nous allons montrer que l'on a $|\eta| < \frac{1}{2}$. (1)

Soit, en effet,

$$A = \log \sin(\alpha + \beta) - \log \sin \alpha = M[L \sin(\alpha + \beta) - L \sin \alpha],$$
$$B = \log \sin(\alpha + \varepsilon) - \log \sin \alpha = M[L \sin(\alpha + \varepsilon) - L \sin \alpha],$$

de sorte que l'on a

$$\eta = 10^7\left[A - \frac{\beta}{\varepsilon}B\right].$$

En appliquant le théorème fondamental à la fonction $L \sin(\alpha + x)$ et, successivement, à l'intervalle $(0, \beta)$, puis à l'intervalle $(0, \varepsilon)$, on voit qu'il existe deux nombres x_1, x_2, compris entre 0 et ε, tels qu'on ait

$$L \sin(\alpha + \beta) - L \sin \alpha = \beta \operatorname{cotg} \alpha - \frac{\beta^2}{2 \sin^2(\alpha + x_1)},$$
$$L \sin(\alpha + \varepsilon) - L \sin \alpha = \varepsilon \operatorname{cotg} \alpha - \frac{\varepsilon^2}{2 \sin^2(\alpha + x_2)};$$

dès lors on a

$$\eta = 10^7 \times M \times \frac{\beta}{2}\left[\frac{\varepsilon}{\sin^2(\alpha + x_2)} - \frac{\beta}{\sin^2(\alpha + x_1)}\right].$$

Comme $\alpha + x_1$, $\alpha + x_2$ sont moindres que $\frac{\pi}{2}$, la quantité entre

(1) Il n'est peut-être pas inutile de faire observer que telle est bien la proposition admise au n° 224. Car, β_1 étant la mesure, avec la seconde pour unité, de l'angle dont β est la mesure trigonométrique, on a $\frac{\beta_1}{10} = \frac{\beta}{\varepsilon}$.

parenthèses est moindre en valeur absolue que $\frac{\varepsilon}{\sin^2 \alpha}$: on a donc

$$|\eta| < 10^7 \times M \times \frac{1}{2} \times \frac{\varepsilon^2}{\sin^2 \alpha},$$

et il suffit de vérifier l'inégalité

$$\sin^2 \alpha > 10^7 \times M \times \varepsilon^2,$$

ou

$$\log \sin \alpha > 3{,}5 + \frac{1}{2} \log M + \log \varepsilon.$$

Or on a

$$\varepsilon < 0{,}000048482,$$
$$\log \varepsilon < \bar{5}{,}6855806,$$
$$\frac{1}{2} \log M < \bar{1}{,}8188922;$$

d'où

$$3{,}5 + \frac{1}{2} \log M + \log \varepsilon < \bar{1}{,}0044728,$$

et il suffit de vérifier que $\log \sin \alpha$ est supérieur à ce nombre. Or on constate que ceci est vrai, pourvu que l'arc α, moindre que $\frac{\pi}{2}$, surpasse la mesure trigonométrique de l'angle de $5^\circ 48'$.

271. Soit maintenant α la mesure trigonométrique d'un angle (que nous supposerons multiple de $10''$) au moins égal à 6° et au plus égal à 84°; β étant un nombre compris entre 0 et ε, posons

$$\log \operatorname{tg} (\alpha + \beta) - \log \operatorname{tg} \alpha = \frac{\beta}{\varepsilon} [\log \operatorname{tg} (\alpha + \varepsilon) - \log \operatorname{tg} \alpha] + \frac{\eta}{10^7}.$$

Nous allons montrer que l'on a $|\eta| < \frac{1}{2}$.

Soit

$$A = \log \operatorname{tg} (\alpha + \beta) - \log \operatorname{tg} \alpha = M[L \operatorname{tg} (\alpha + \beta) - L \operatorname{tg} \alpha],$$
$$B = \log \operatorname{tg} (\alpha + \varepsilon) - \log \operatorname{tg} \alpha = M[L \operatorname{tg} (\alpha + \varepsilon) - L \operatorname{tg} \alpha],$$

de sorte que l'on a

$$\eta = 10^7 \left(A - \frac{\beta}{\varepsilon} B\right).$$

En appliquant le théorème fondamental à la fonction $L \operatorname{tg} (\alpha + x)$ et, successivement, à l'intervalle $(0, \beta)$, puis à l'intervalle $(0, \varepsilon)$, on voit qu'il existe deux nombres x_1, x_2, compris entre 0 et ε, tels qu'on ait

$$L \operatorname{tg} (\alpha + \beta) - L \operatorname{tg} \alpha = \frac{2\beta}{\sin 2\alpha} - \frac{2\beta^2 \cos (2\alpha + 2x_1)}{\sin^2 (2\alpha + 2x_1)},$$
$$L \operatorname{tg} (\alpha + \varepsilon) - L \operatorname{tg} \alpha = \frac{2\varepsilon}{\sin 2\alpha} - \frac{2\varepsilon^2 \cos (2\alpha + 2x_2)}{\sin^2 (2\alpha + 2x_2)}.$$

On a donc

$$\eta = 10^7 \times M \times 2\beta \left[\frac{\varepsilon \cos(2\alpha + 2x_2)}{\sin^2(2\alpha + 2x_2)} - \frac{\beta \cos(2\alpha + 2x_1)}{\sin^2(2\alpha + 2x_1)}\right].$$

Cela posé, distinguons deux cas :

1° $\alpha \leqslant \frac{\pi}{4} - \varepsilon$. Les nombres $2\alpha + 2x_1$, $2\alpha + 2x_2$ sont alors moindres que $\frac{\pi}{2}$, et la quantité entre parenthèses est moindre en valeur absolue que $\frac{\varepsilon}{\sin^2 2\alpha}\cdot$ On a donc

$$|\eta| < 10^7 \times M \times 2 \times \frac{\varepsilon^2}{\sin^2 2\alpha},$$

et il suffit de vérifier l'inégalité

$$\sin^2 2\alpha > 10^7 \times M \times 4 \times \varepsilon^2,$$

ou

$$\log \sin 2\alpha > 3{,}5 + \frac{1}{2} \log M + \log 2 + \log \varepsilon.$$

Or on a

$$3{,}5 + \frac{1}{2} \log M + \log \varepsilon < \bar{1}{,}0044728,$$
$$\log 2 < 0{,}3010300\,;$$

d'où

$$3{,}5 + \frac{1}{2} \log M + \log \varepsilon + \log 2 < \bar{1}{,}3055028,$$

et il suffit de vérifier que $\log \sin 2\alpha$ est supérieur à ce nombre. Or ceci est vrai, pourvu que l'arc 2α, moindre que $\frac{\pi}{2}$, surpasse la mesure trigonométrique de l'angle de 11°39′30″, ou que l'arc α, inférieur à $\frac{\pi}{4}$, surpasse la mesure trigonométrique de l'angle de 5°49′45″.

2° $\alpha \geqslant \frac{\pi}{4}\cdot$ Les nombres $2\alpha + 2x_1$, $2\alpha + 2x_2$ sont alors supérieurs à $\frac{\pi}{2}$, et la quantité entre parenthèses est moindre en valeur absolue que $\frac{\varepsilon}{\sin^2(2\alpha + 2\varepsilon)}\cdot$ Il suffit donc, cette fois, de vérifier l'inégalité

$$\log \sin(2\alpha + 2\varepsilon) \quad \text{ou} \quad \log \sin(\pi - 2\alpha - 2\varepsilon) > \bar{1}{,}3055028,$$

inégalité qui a lieu dès que l'arc $\pi - 2\alpha - 2\varepsilon$, moindre que $\frac{\pi}{2}$, surpasse la mesure trigonométrique de l'angle de 11° 39′ 30″, ce qui revient à dire que l'arc 2α, supérieur ou égal à $\frac{\pi}{2}$, est moindre

que la mesure trigonométrique de l'angle de 168° 20′ 10″, ou que l'arc α, supérieur ou égal à $\frac{\pi}{4}$, est moindre que la mesure trigonométrique de l'angle de 84° 10′ 5″.

272. α étant la mesure trigonométrique d'un angle au plus égal à 84°, et β étant un nombre compris entre 0 et ε, la différence

$$\delta = \log\cos\alpha - \log\cos(\alpha+\beta) - \frac{\beta}{\varepsilon}[\log\cos\alpha - \log\cos(\alpha+\varepsilon)]$$

est en valeur absolue moindre que $\frac{1}{2\times 10^7}$. Car on a, en posant

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha' - \varepsilon, \qquad \beta = \varepsilon - \beta' :$$

$$\delta = \log\sin(\alpha'+\varepsilon) - \log\sin(\alpha'+\beta')$$
$$- \left(1 - \frac{\beta'}{\varepsilon}\right)[\log\sin(\alpha'+\varepsilon) - \log\sin\alpha']$$
$$= \frac{\beta'}{\varepsilon}[\log\sin(\alpha'+\varepsilon) - \log\sin\alpha'] - [\log\sin(\alpha'+\beta') - \log\sin\alpha'],$$

différence dans laquelle α' est la mesure trigonométrique d'un angle au plus égal à 89° 59′ 50″ et au moins égal à 5° 59′ 50″.

De même, α étant la mesure trigonométrique d'un angle (multiple de 10″) au moins égal à 6° et au plus égal à 84°, et β étant compris entre 0 et ε, la différence

$$\delta = \log\operatorname{cotg}\alpha - \log\operatorname{cotg}(\alpha+\beta) - \frac{\beta}{\varepsilon}[\log\operatorname{cotg}\alpha - \log\operatorname{cotg}(\alpha+\varepsilon)]$$

est en valeur absolue moindre que $\frac{1}{2\times 10^7}$. Car on a, en posant

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha' - \varepsilon, \qquad \beta = \varepsilon - \beta' :$$

$$\delta = \frac{\beta'}{\varepsilon}[\log\operatorname{tg}(\alpha'+\varepsilon) - \log\operatorname{tg}\alpha'] - [\log\operatorname{tg}(\alpha'+\beta') - \log\operatorname{tg}\alpha'],$$

et α' est la mesure trigonométrique d'un angle (multiple de 10″) au moins égal à 5° 59′ 50″ et au plus égal à 83° 59′ 50″.

TABLE DES MATIÈRES

Bar-le Duc. — Imprimerie Comte-Jacquet. — FACDOUEL, Dir.

